



**Susana Raquel da
Silva Leal Pereira**

**Integrabilidade e Dispersão de Sistemas
Hamiltonianos**



**Susana Raquel da
Silva Leal Pereira**

**Integrabilidade e Dispersão de Sistemas
Hamiltonianos**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no ramo de Análise e Geometria, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Alexander Plakhov, professor associado convidado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Prof. Doutor. Vasile Staicu
professor catedrático da Universidade de Aveiro

Prof. Doutor Alexander Plahkov
professor associado convidado da Universidade de Aveiro

Prof. Doutora Inês Maria Bravo de Faria Cruz
professora auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

agradecimentos

Ao meu orientador, pela compreensão, apoio e incentivo que me deu para a realização deste trabalho.

Aos meus familiares mais próximos, pela certeza de que estarão sempre a meu lado, aconteça o que acontecer, e por contribuírem para que eu seja a pessoa feliz e realizada que sou.

Ao Jorge,... por tudo. Adoro-te!

resumo

Neste trabalho apresentam-se os conceitos e princípios básicos da Mecânica Clássica e os principais modelos para descrever o movimento de corpos. Assim, apresentam-se os modelos da Mecânica Newtoniana e da Mecânica Hamiltoniana, e deduzem-se as equações que, em cada modelo, descrevem o movimento.

Posteriormente, aborda-se a problemática da resolução destas equações e, em particular, da integrabilidade das equações de Hamilton. Neste contexto, é enunciado e demonstrado o Teorema de Liouville sobre Sistemas Integráveis.

Como exemplo de um sistema integrável, discute-se o problema da dispersão de um sistema de partículas numa recta. Mostra-se que, sob determinadas condições, é possível caracterizar o movimento deste sistema conhecendo apenas o seu potencial, e vice-versa.

Finalmente, é estudado este mesmo exemplo pelo Método de Integração por Deformação Isospectral, desenvolvido por P. D. Lax e analisada a conjectura de Marchioro sobre o seu comportamento assintótico.

abstract

This work presents basic concepts and laws of Classical Mechanics and the most important models used to describe the motion. Therefore, we introduce Newtonian Mechanics and Hamiltonian Mechanics, and deduce the equations that, in each case, describe the motion.

Next, we approach the problem of solving these equations and, in particular, the integrability of Hamiltonian equations. In this context, we enunciate and prove Liouville's Theorem on Integrable Systems.

As an example of an integrable system, we discuss the scattering problem for some particle system on the line. We show that, under certain conditions, we can describe its motion knowing only the potential, and vice versa.

Finally, we study this same example using Isospectral Deformations, an integration method developed by P. D. Lax and we analyse Marchioro's conjecture on its asymptotic behaviour.

índice

Introdução	1
Capítulo 1	
Dos Princípios Básicos da Mecânica Clássica à Mecânica Hamiltoniana	3
1.1. Conceitos básicos	3
1.2. O Princípio da Determinação de Newton-Laplace	5
1.3. O Princípio da Relatividade	8
1.4. Quantidades Dinâmicas básicas. Leis de Conservação	11
1.5. Das Equações de Newton às Equações de Hamilton	14
Capítulo 2	
Integrabilidade de Sistemas Hamiltonianos	20
2.1. Teorema de Liouville sobre sistemas integráveis	21
2.2. Demonstração do Teorema de Liouville	23
Capítulo 3	
O problema da dispersão de um sistema de partículas numa recta	44
3.1. Caracterização do movimento de um sistema de partículas numa recta	45
3.2. Determinação da diferença de fase a partir do potencial	49
3.3. O problema inverso: formulação do teorema	56
3.4. Demonstração do teorema	58
Capítulo 4	
Integração por Deformação Isospectral. A conjectura de Marchioro	65
4.1. Deformações Isospectrais	66
4.2. Deformações Isospectrais no problema da dispersão de n partículas numa recta	69
4.3. A conjectura de Marchioro e o comportamento assintótico deste sistema de partículas	75
Referências Bibliográficas	80

Integrabilidade e Dispersão de Sistemas Hamiltonianos

Introdução

Para descrever o movimento de sistemas mecânicos são usados vários modelos matemáticos, os quais são baseados em diferentes princípios, chamados leis do movimento.

O modelo mais simples e mais importante é o da mecânica Newtoniana, que descreve o movimento de um sistema de partículas livres. Já o modelo da mecânica Hamiltoniana é usado quando o movimento é condicionado por vínculos. Cada um destes modelos é caracterizado por um sistema de equações diferenciais - as equações de Newton e as equações de Hamilton, respectivamente.

As equações diferenciais, incluindo as anteriormente referidas, são normalmente classificadas em integráveis e não integráveis. Liouville formulou um teorema que garante a integrabilidade de sistemas Hamiltonianos sob determinadas condições. No entanto, trabalhos posteriores a Liouville, nomeadamente de Poincaré e de Burn, mostraram que a integrabilidade dos sistemas Hamiltonianos não é uma propriedade genérica dos mesmos, mas antes uma característica de alguns sistemas particulares.

O problema da dispersão de um sistema de partículas numa recta é um desses raros exemplos. Moser estabeleceu condições sob as quais é possível caracterizar o movimento deste sistema conhecendo apenas o seu potencial e vice-versa. O Método de Integração por Deformação Isospectral, desenvolvido por P. D. Lax foi, também, utilizado por Moser na integração deste sistema.

Apesar de parecer um anacronismo estudar estes casos excepcionais, a

verdade é que nos últimos anos foram descobertos fenómenos que estão claramente associados aos sistemas Hamiltonianos e que, no entanto, têm origens completamente distintas. Os trabalhos de Calogero e Marchioro são exemplos de como o estudo da integrabilidade continua hoje em dia a fazer sentido.

Capítulo 1

Dos Princípios Básicos da Mecânica Clássica à Mecânica Hamiltoniana

Neste primeiro capítulo pretende-se apresentar os conceitos e princípios básicos da mecânica clássica. E o modelo mais simples e mais importante para descrever o movimento de corpos reais é o da mecânica Newtoniana. As Equações de Newton descrevem o movimento de um sistema de partículas livres que interagem mutuamente no espaço euclidiano tridimensional.

No caso de se tratar de um sistema de partículas não livres, ou seja, de se tratar de um sistema cujo movimento esteja condicionado por determinados vínculos, é utilizado o modelo da mecânica Hamiltoniana. Estes sistemas são então conhecidos por sistemas Hamiltonianos e as equações que os definem por Equações de Hamilton.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1.1.1 *O **espaço** onde o movimento tem lugar é tridimensional e euclidiano, com uma orientação predeterminada. Denotamo-lo, usualmente,*

por \mathbb{R}^3 . Neste espaço, fixamos um ponto $0 \in \mathbb{R}^3$, chamado de **origem** ou **ponto de referência**. Assim sendo, a posição de cada ponto s em \mathbb{R}^3 é univocamente determinada pelo seu **vector posição**, também chamado de **raio**, $\vec{0}s = r$. O conjunto de todos os vectores posição é também o espaço linear tridimensional \mathbb{R}^3 , o qual está equipado com o produto interno usual, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.1.2 O **tempo** é unidimensional, e denotamo-lo usualmente por t . O conjunto $\mathbb{R} = \{t\}$ é chamado de **eixo temporal**.

Definição 1.1.3 Um **movimento** ou **percurso** do ponto s é uma aplicação suave $I \rightarrow \mathbb{R}^3$, em que I denota um intervalo de tempo. Nestas condições, dizemos que o movimento está definido no intervalo I .

A cada movimento corresponde uma única função vectorial $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Definição 1.1.4 A **velocidade** v do ponto s no instante $t \in I$ é obtida por derivação de r , ou seja,

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Claramente, este vector velocidade é independente da escolha da origem.

Definição 1.1.5 A **aceleração** a do ponto s no instante $t \in I$ é também obtida por derivação, neste caso, de v :

$$a = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Ambos os vectores velocidade e aceleração são usualmente representados aplicados no ponto s .

O conjunto \mathbb{R}^3 é também chamado de **espaço posição** ou **espaço de configuração** do ponto s . O par (s, v) é chamado de **estado** ou **fase** de s e o espaço $\mathbb{R}^3\{s\} \times \mathbb{R}^3\{v\} = \mathbb{R}^6$ de **espaço de estado** ou de **espaço de fase**.

Consideremos agora o caso geral em que n pontos s_1, s_2, \dots, s_n se movem em \mathbb{R}^3 . O espaço de configuração deste sistema livre é o conjunto \mathbb{R}^{3n} .

Seja $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ o vector posição do sistema de pontos s_1, s_2, \dots, s_n . O movimento deste sistema livre é descrito por funções vectoriais suaves $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_n(t))$. Tal como anteriormente, definimos a velocidade deste sistema,

$$v = \dot{r} = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{3n}$$

e a sua aceleração,

$$a = \ddot{r} = (\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \dots, \ddot{r}_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{3n}.$$

Note-se que admitimos sempre que todas as funções da dinâmica são suaves, e portanto é sempre possível derivá-las.

1.2 O Princípio da Determinação de Newton-Laplace

Este princípio diz-nos que o estado de um sistema mecânico num qualquer instante determina univocamente todo o seu movimento (passado e futuro).

Suponhamos conhecido o estado (s_0, v_0) do sistema no instante t_0 . Então, pelo Princípio da Determinação, é também conhecido o movimento $r(t)$ que satisfaz as condições iniciais $r(t_0) = r_0$ e $\dot{r}(t_0) = \dot{r}_0 = v_0$ para qualquer $t \in I \subset \mathbb{R}$. Em particular, podemos calcular a aceleração \ddot{r} no instante t_0 . Por outras palavras, podemos determinar a aceleração \ddot{r} como função das condições iniciais t_0, r_0 e \dot{r}_0 , ou seja,

$$\ddot{r}(t_0) = f(t_0, r_0, \dot{r}_0),$$

em que f é uma função cuja existência é garantida pelo Princípio da Determinação de Newton-Laplace. Uma vez que a escolha de t_0 é arbitrária, concluímos que a equação

$$\ddot{r} = f(t, r, \dot{r})$$

vale para qualquer t .

Esta equação diferencial é conhecida por equação do movimento ou equação de Newton. A existência desta equação (com uma função vectorial suave f) e o Princípio da Determinação são, de facto, equivalentes. Este facto é consequência do teorema da existência e unicidade de soluções da teoria das equações diferenciais ordinárias.

A função f da equação de Newton é normalmente determinada experimentalmente e a sua especificação tem a ver com o sistema mecânico considerado.

Apresentam-se, de seguida, alguns exemplos de equações de Newton em diferentes sistemas mecânicos.

Exemplo 1.2.1 *A equação que descreve a queda de um ponto no vácuo próximo da superfície terrestre (obtida experimentalmente por Galileu) tem a forma*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -ge_z,$$

em que $g \approx 9,8\text{m/s}^2$ é a aceleração da gravidade ou em queda livre e e_z é o vector unitário perpendicular à superfície terrestre.

Exemplo 1.2.2 *R. Hooke mostrou que a equação que descreve as pequenas oscilações de um corpo preso à extremidade de uma mola elástica tem a forma*

$$\ddot{\chi} = -\alpha\chi, \text{ com } \alpha > 0.$$

O coeficiente constante α depende do corpo e da mola em questão. Este sistema mecânico é conhecido por oscilador harmónico.

Variadas experiências mostraram que, em vez de determinar a função f que aparece no segundo membro da equação de Newton para determinar a aceleração, era mais conveniente determinar $F = mf$, em que m é um número positivo chamado de **massa** do ponto (o significado físico do conceito de massa é irrelevante no estudo da dinâmica). O vector F é chamado de **força** que actua no ponto de massa m .

Assim sendo, nas experiências de Hooke a constante $c = m\alpha$ depende das propriedades da mola mas não da escolha do corpo que a ela está preso; esta constante é chamada de **coeficiente de elasticidade**.

O par (s, m) ou (r, m) em que r é o vector posição do ponto s , é chamado de **ponto material**, **massa pontual** ou **partícula** de massa m e habitualmente usamos apenas m para denotar este par.

Se um sistema consiste em n pontos materiais com massas m_1, m_2, \dots, m_n , então as equações de Newton

$$\ddot{r}_i = f_i(t, r_1, \dots, r_n, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n), \quad 1 \leq i \leq n,$$

podem ser reescritas na forma

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(t, r, \dot{r}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Estas últimas equações também podem ser referidas como equações de Newton.

Exemplo 1.2.3 *Newton estabeleceu que se se considerarem n pontos materiais $(r_1, m_1), \dots, (r_n, m_n)$ no espaço, então a força que actua no i -ésimo ponto é*

$$F_i = \sum_{j \neq i} F_{ij},$$

em que

$$F_{ij} = \frac{\gamma m_i m_j}{|r_{ij}|^3} r_{ij}, \quad r_{ij} = r_i - r_j \text{ e } \gamma = \text{constante} > 0.$$

Esta fórmula é conhecida por Lei da Gravitação Universal.

Exemplo 1.2.4 *A força de resistência que actua num corpo que se move rapidamente no ar é proporcional ao quadrado da sua velocidade (Lei de Stoke). De acordo com este princípio, a equação que descreve o movimento de um corpo em queda no ar é*

$$m \ddot{z} = mg - c \dot{z}^2,$$

com $c > 0$. *É possível mostrar que a velocidade limite deste movimento existe e é igual a $\sqrt{mg/c}$, independentemente das condições iniciais do corpo.*

O Princípio da Determinação também é válido na mecânica relativista, que se distingue da mecânica Newtoniana pelo Princípio da Relatividade que se segue.

1.3 O Princípio da Relatividade

O produto directo $\mathbb{R}^3\{s\} \times \mathbb{R}\{t\} = \mathbb{R}^4$ (espaço-tempo) carrega uma estrutura natural de espaço afim. O **grupo Galileano** é o grupo de todas as transformações afins de \mathbb{R}^4 que preservam os intervalos de tempo e que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixado arbitrariamente, são isometrias de \mathbb{R}^3 .

Desta forma, se $g : (s, t) \mapsto (s', t')$ é uma transformação Galileana, então

$$t_\alpha - t_\beta = t'_\alpha - t'_\beta$$

e,

$$\text{se } t_\alpha = t_\beta, \text{ então } |s_\alpha - s_\beta| = |s'_\alpha - s'_\beta|.$$

Facilmente se vê que o grupo Galileano actua em \mathbb{R}^4 .

Mencionamos de seguida três exemplos de transformações Galileanas deste espaço. A primeira, o **movimento uniforme de velocidade** v :

$$g_1(r, t) = (r + tv, t).$$

Depois, a **translação do ponto de referência** (origem) no espaço-tempo:

$$g_2(r, t) = (r + x, t + \alpha).$$

Finalmente, a **rotação em torno dos eixos coordenados**:

$$g_3(r, t) = (Gr, t),$$

em que $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação ortogonal.

Proposição 1.3.1 *Toda a transformação Galileana $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ pode ser univocamente representada como composição (produto) de transformações dos tipos acima indicados.*

Fixemos agora um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^3 : fixamos um ponto $0 \in \mathbb{R}^3$ e escolhemos três eixos mutuamente ortogonais em 0 .

Qualquer transformação Galileana transforma este sistema de coordenadas num novo sistema de coordenadas que está em movimento rectilíneo uniforme em relação ao sistema original. Estes sistemas de coordenadas são chamados de **inerciais**.

A acção do grupo Galileano em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ é naturalmente extendida a uma acção em $\mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{3n+1}$ tal que,

$$\text{se } g : (s, t) \rightarrow (s', t'), \text{ então } g(s_1, \dots, s_n, t) \rightarrow (s'_1, \dots, s'_n, t').$$

O Princípio da Relatividade diz que as equações de Newton, escritas em sistemas inerciais, são invariantes em relação ao grupo de transformações Galileanas. Este princípio impõe várias condições ao segundo membro da equação de Newton num sistema inercial. Assim sendo, uma vez que entre as transformações Galileanas se encontram as translações no tempo, as forças não podem depender do tempo t :

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_i, \dot{r}_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Na verdade, as forças que dependem de t podem aparecer na mecânica Newtoniana apenas em modelos simplificados do movimento.

As translações no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 também são transformações Galileanas. Da homogeneidade de \mathbb{R}^3 segue que, em sistemas de coordenadas inerciais, as forças só podem depender das coordenadas relativas $r_k - r_l$. Além disso, da invariância das equações de Newton relativamente ao subgrupo dos movimentos uniformes do tipo g_1 , resulta que as forças só podem depender das velocidades relativas dos pontos:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i(r_k - r_l, \dot{r}_k - \dot{r}_l), \quad i, k, l = 1, \dots, n.$$

Finalmente, da invariância de \mathbb{R}^3 relativamente ao subgrupo das rotações g_3 , tem-se que

$$F(Gr, G\dot{r}) = GF(r, \dot{r}).$$

Deste modo, se um sistema mecânico consiste num único ponto, então o seu movimento num qualquer sistema de coordenadas inercial é rectilíneo uniforme - esta conclusão é conhecida por Lei da Inércia de Galileu-Newton. De facto, neste caso a força F não depende de t, r, \dot{r} e é invariante relativamente às rotações. Consequentemente, $F \equiv 0$.

Se num dado sistema considerarmos dois pontos, então as forças F_1 e F_2 que actuam nestes pontos têm a direcção da recta que eles definem. Além disso, de acordo com o princípio da acção-reacção, $F_1 = -F_2$. Este princípio, que é independente do princípio da Relatividade, obriga-nos a introduzir noções gerais de forças de interacção e sistemas mecânicos fechados.

Assim, um sistema de n pontos materiais (r_i, m_i) , $i = 1, \dots, n$, no qual actuam as forças F_i diz-se **fechado** se

$$F_i = \sum_{j \neq i} F_{ij} \text{ e } F_{kl} = -F_{lk}.$$

O vector F_{ij} designa a força que o j -ésimo ponto faz actuar no i -ésimo ponto. Um exemplo importante de interacção é a gravitação universal, anteriormente apresentado no exemplo 1.2.3.

No caso do sistema consistir em três pontos materiais, do Princípio da Relatividade resulta que as forças que actuam nestes pontos estarão no plano que os contém.

De entre os exemplos dados na secção anterior, apenas a gravitação universal é invariante relativamente às transformações Galileanas. Se, no entanto, num sistema de pontos materiais em interacção gravitacional, uma das massas for infinitamente pequena (por exemplo, uma partícula de pó no Sistema Solar), então a sua influência no movimento dos outros pontos pode ser desprezada. Este é um exemplo de um problema (com bastantes aplicações em astronomia) no qual o Princípio da Relatividade de Galileu já não é válido. Todas as leis do movimento que encontramos na mecânica Newtoniana e que não são invariantes relativamente às transformações Galileanas, são obtidas a partir de leis invariantes assumindo algumas simplificações naturais.

1.4 Quantidades Dinâmicas básicas. Leis de Conservação

As próximas características do movimento, também chamadas de Quantidades, são importantes na dinâmica:

Definição 1.4.1 Chamamos **Momento linear** de uma massa pontual ou **Quantidade de movimento** e denotamos por \mathbf{p} a:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Definição 1.4.2 Chamamos **Momento angular** de uma massa pontual e denotamos por \mathbf{l} a:

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}).$$

Definição 1.4.3 Chamamos de **Momento de uma força** ou **torção** e denotamos por \mathbf{M} a:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Definição 1.4.4 Chamamos **Energia Cinética** de uma massa pontual e denotamos por T a:

$$T = \frac{1}{2}mv^2.$$

Definição 1.4.5 Chamamos de **Momento de inércia** de uma massa pontual e denotamos por I a:

$$I = mr^2.$$

Se um sistema consiste em n massas pontuais m_1, \dots, m_n , as quantidades dinâmicas do sistema resultam simplesmente da soma das respectivas quantidades de cada massa pontual m_i , $1 \leq i \leq n$. Além disso, valem as seguintes proposições:

Proposição 1.4.1 *Seja $P = \sum p_i$ e $F = \sum F_i$. Então $\dot{P} = F$.*

O ponto

$$\xi = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

é chamado de **centro de massa** ou **baricentro** do sistema considerado e a sua posição não depende da escolha da origem das coordenadas.

Corolário 1.4.1 *O movimento do centro de massa de um sistema mecânico fechado é rectilíneo uniforme, isto é, $\ddot{r}_\xi = 0$.*

Este facto foi observado por Newton e é conhecido por **Lei da Conservação do Momento Linear** ou **Lei da Conservação da Quantidade de Movimento**.

Proposição 1.4.2 *Seja $L = \sum l_i$ e $M = \sum M_i$. Então $\dot{L} = M$.*

Corolário 1.4.2 *Se um sistema mecânico é fechado, então $L = \text{const.}$*

Este facto foi observado por Euler, D. Bernoulli e d'Arcy, em trabalhos independentes e é conhecido por **Lei da Conservação do Momento Angular**.

Uma força que actua num ponto material diz-se **central** se a recta que define a sua direcção passa pela origem $0 \in \mathbb{R}^3$.

Corolário 1.4.3 *O movimento sob acção de uma força central ocorre sempre num plano que contém a origem das coordenadas.*

Proposição 1.4.3 *Seja $T = \sum T_i$. Então $\dot{T} = \sum \langle F_i, v_i \rangle$.*

As forças $F_i(r_1, \dots, r_n)$ são ditas **conservativas** se a forma diferencial

$$\sum_{i=1}^n \langle F_i(r), dr_i \rangle,$$

conhecida por **trabalho** (total) das forças F_i nos deslocamentos infinitesimais dr_i , é exacta, isto é, se é o simétrico do diferencial de alguma função $U(r_1, \dots, r_n)$. Esta função U é chamada de **energia potencial** ou simplesmente de **potencial** do sistema das massas pontuais.

Corolário 1.4.4 *Se as forças são conservativas, então a energia total de qualquer movimento, designada usualmente por h e resultante da soma das energias cinética e potencial, é constante, ou seja,*

$$h = T + U = \text{const.}$$

Este facto era já conhecido por Huygens, Newton, J. e D. Bernoulli mas apenas em casos particulares e é conhecido por **Lei da Conservação da Energia**.

A existência das Leis de Conservação do Momento Linear, de Conservação do Momento Angular e de Conservação da Energia em sistemas fechados de massas pontuais está relacionada com a invariância das equações de Newton relativamente ao grupo das transformações Galileanas.

Proposição 1.4.4 *Se as forças de interacção num sistema dependerem apenas das distâncias relativas entre os seus pontos, isto é, se*

$$F_{ij} = f_{ij}(|r_{ij}|)e_{ij}$$

com

$$r_{ij} = r_i - r_j \quad \text{e} \quad e_{ij} = -\frac{r_{ij}}{|r_{ij}|},$$

então essas forças são conservativas.

Este facto foi observado por Lagrange.

Neste caso, a energia potencial U é dada por

$$U = \sum_{i < j} U_{ij},$$

em que

$$U_{ij} = \int f_{ij}(|r_{ij}|) d|r_{ij}|,$$

ou seja, U_{ij} designa a **energia da interacção** das massa pontuais m_i e m_j .

Por exemplo, no caso da gravitação universal, a energia potencial é

$$U = \sum_{i < j} \frac{\gamma m_i m_j}{|r_{ij}|}.$$

Proposição 1.4.5 *Seja $I = m_i r_i^2$ o momento de inércia do sistema relativamente à origem $0 \in \mathbb{R}^3$. Então*

$$\ddot{I} = 4T + 2 \sum_i \langle F_i, r_i \rangle.$$

Se as forças forem conservativas e a energia potencial for uma função homogénia de grau k , então

$$\ddot{I} = 4T - 2 \sum_i \left\langle \frac{\partial V}{\partial r_i}, r_i \right\rangle = 4T - 2kU = 4h - 2(k+2)U,$$

e portanto I depende apenas da localização dos pontos e da energia total. No caso da gravitação universal, $k = -1$, e então

$$\ddot{I} = 4h - 2U.$$

Esta fórmula foi obtida por Lagrange.

1.5 Das Equações de Newton às Equações de Hamilton

Suponhamos que um ponto de massa m se move sob a acção de uma força conhecida F numa superfície suave e regular S em \mathbb{R}^3 , superfície essa definida

pela equação

$$f(x, y, z) = 0.$$

Ora, de certa forma, a superfície impõe algumas restrições ao movimento e este motivo faz com que a equação que define a superfície seja conhecida por **equação de vínculo**. É natural que se identifique a influência da superfície S no movimento do ponto com a acção de uma força N perpendicular a essa superfície. Se considerarmos que m é um ponto livre, o seu movimento é descrito pela equação de Newton

$$m \ddot{r} = F + N.$$

Desta equação, e tendo em conta a equação de vínculo, é possível determinar univocamente a força N como função do estado e do tempo. A equação de Newton pode assim ser reescrita como

$$\langle m \ddot{r} - F, \xi \rangle = 0,$$

em que ξ é um vector arbitrário tangente à superfície S . Esta equação pode ser interpretada como a lei do movimento de Newton no plano tangente a S .

Na mecânica, a força N é usualmente chamada de **pressão** ou, mais geralmente, de **reacção ao vínculo** $f(x, y, z) = 0$ e os vectores tangentes ξ são conhecidos por **deslocamentos virtuais**, **variações** ou **velocidades** do ponto vinculado m .

No caso geral do movimento não livre de n pontos $(m_1, r_1), \dots, (m_n, r_n)$, os vínculos são definidos por uma variedade suave M contida no espaço de fase do sistema livre $\mathbb{R}^{3n} = \mathbb{R}^3\{r_1\} \times \dots \times \mathbb{R}^3\{r_n\}$. Estes vínculos permitem apenas movimentos nos quais $(r_1(t), \dots, r_n(t)) \in M$ para qualquer t . No caso de actuarem nos pontos dados forças conhecidas F_1, \dots, F_n , a equação

$$\langle m \ddot{r} - F, \xi \rangle = 0$$

é generalizada para

$$\sum_{i=1}^n \langle m_i \ddot{r}_i - F_i, \xi_i \rangle = 0,$$

em que (ξ_1, \dots, ξ_n) é um vector arbitrário tangente a M . A equação anterior é conhecida por Equação Geral da Dinâmica ou Princípio de d'Alembert-Lagrange; no caso de se tratar de um sistema de pontos livres, os vectores ξ_i são completamente arbitrários e portanto esta equação é equivalente ao sistema de equações de Newton anteriormente apresentado.

Aos pontos $x \in M$ chamamos **configurações** ou **posições do sistema** e a cada vector ξ tangente a M em x chamamos **velocidade** em x . O par (x, ξ) é chamado de **estado** ou **velocidade de fase do sistema**. O conjunto de todos os vectores tangentes a M no ponto x , que designamos por $T_x M$, é o **espaço tangente** a M em x e TM designa o **fibrado tangente** a M , também chamado de **espaço de estado** ou **espaço de velocidade de fase**. Este último inclui todos os vectores tangentes a M em qualquer dos seus pontos. Assim sendo,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Chamamos **forma diferencial de ordem 1** ou **1-forma diferencial** na variedade M a uma aplicação diferenciável $\omega^1 : TM \rightarrow \mathbb{R}$, que é linear em cada espaço tangente $T_x M$. O espaço das 1-formas em $T_x M$ é chamado de **espaço co-tangente** e designado por $T_x^* M$.

Chamamos **forma diferencial de ordem k** ou **k -forma diferencial** no **ponto x** da variedade M a uma aplicação ω^k , anti-simétrica e k -linear dos k vectores ξ_1, \dots, ξ_k tangentes a M em x , ou seja, elementos de $T_x M$. Se esta aplicação estiver definida em cada ponto x da variedade M , e se for diferenciável, dizemos que é uma **k -forma diferencial** em M .

Consideremos agora que a variedade suave M tem dimensão par $2n$.

Uma **estrutura simplética** em M é definida por uma 2-forma diferencial fechada e não degenerada ω^2 , ou seja,

$$d\omega^2 = 0, \forall \xi \neq 0 \exists \eta : \omega^2(\xi, \eta) \neq 0,$$

em que ξ e η representam vectores tangentes a M num determinado ponto x , ou seja, elementos de $T_x M$.

De acordo com o Teorema de Darboux, em cada ponto de M existe uma vizinhança na qual a estrutura simplética ω^2 pode ser reduzida, em coordenadas locais adequadas $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, à chamada forma canónica:

$$\omega^2 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Estas coordenadas locais p, q são usualmente designadas por coordenadas **simpléticas** ou **canónicas**.

A forma ω^2 permite-nos definir um isomorfismo natural entre o espaço tangente $T_x M$ e o espaço co-tangente $T_x^* M$, transformando cada vector tangente $\xi \in T_x M$ numa 1-forma $\omega_\xi^1 \in T_x^* M$ pela regra:

$$\omega_\xi^1(\eta) = \omega^2(\eta, \xi), \quad \eta \in T_x M.$$

Uma vez que a 2-forma ω^2 é bilinear e não degenerada, esta correspondência é, de facto, um isomorfismo linear. Denotemos o isomorfismo inverso por I , ou seja,

$$I : T_x^* M \rightarrow T_x M.$$

Seja H uma função suave em M (que pode depender do tempo).

Uma vez que o diferencial dH é um campo co-vectorial (ou seja, uma 1-forma diferencial), IdH é um campo vectorial (suave) em M , a que chamamos **campo vectorial Hamiltoniano**. A equação diferencial correspondente,

$$\dot{x} = IdH(x),$$

é chamada de **equação de Hamilton** e H é chamada de **função de Hamilton**.

A cada campo vectorial IdH podemos vincular um **fluxo de fase com função de Hamilton** H , denotado por g^t , com $t \in \mathbb{R}$. Este fluxo de fase não é mais do que uma correspondência definida em M ,

$$g^t : M \longrightarrow M,$$

tal que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g^t(x) = IdH(x).$$

Geometricamente, interpretamos o fluxo como sendo a deslocação de um ponto x na variedade M numa direcção tangente ao vector $IdH(x)$ em $t = 0$.

Se F e G são funções suaves em M , então a função suave

$$\omega^2(IdG, IdF)$$

está bem definida e é chamada de **parêntesis de Poisson** das funções F e G , denotada habitualmente por $[F, G]$. O parêntesis de Poisson tem as seguintes propriedades:

- Bilinearidade
- Anti-simetria: $[F, G] = -[G, F]$
- Regra de Leibniz: $[F_1 F_2, G] = F_1 [F_2, G] + F_2 [F_1, G]$
- Identidade de Jacobi: $[[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] = 0$
- Não-degeneracidade: se $x \in M$ não é um ponto crítico de F , então existe uma função suave G tal que $[F, G](x) \neq 0$

Em coordenadas simpléticas locais p, q , tem-se que

$$[F, G] = \sum_{i=1}^n (G'_{p_i} F'_{q_i} - G'_{q_i} F'_{p_i}).$$

Se $[F, G] \equiv 0$, dizemos que as funções F e G estão em **involução**.

O parêntesis de Poisson $[F, G]$ também pode ser calculado pela fórmula $dF(IdG)$, isto é, como sendo o valor do co-vector (ou seja, da 1-forma) dF no vector IdG . Assim sendo, a derivada da função F na direcção do campo vectorial Hamiltoniano IdH é, de facto, $[F, H]$. Portanto, a equação de Hamilton

$$\dot{x} = IdH(x)$$

pode ser escrita da seguinte forma equivalente:

$$\dot{F} = [F, H].$$

Uma vez que as funções coordenadas $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ formam um conjunto completo de funções independentes, as equações

$$\dot{p}_i = [p_i, H] \text{ e } \dot{q}_i = [q_i, H], \quad 1 \leq i \leq n,$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{p}_i = -H'_{q_i} \text{ e } \dot{q}_i = H'_{p_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

formam um sistema fechado. São chamadas de **equações canônicas de Hamilton**.

Capítulo 2

Integrabilidade de Sistemas Hamiltonianos

No capítulo anterior foram apresentadas as equações do movimento (quer as equações de Newton, quer as equações de Hamilton). No entanto, nada foi dito sobre o modo como as resolver em casos particulares.

Em geral, este é um problema meramente matemático. Um sistema com n graus de liberdade (isto é, com um espaço de fase $2n$ -dimensional) tem n equações diferenciais que são de segunda ordem em relação à variável tempo. A resolução de cada equação exige duas integrações, dando assim origem a $2n$ constantes de integração. Num problema específico, estas constantes são determinadas através das condições iniciais do sistema, isto é, dos valores iniciais das posições e velocidades das massas pontuais que dele fazem parte.

Por vezes, a integração das equações do movimento é feita à custa de funções conhecidas. Neste caso, diz-se que a integração é feita em **quadraturas**.

A integração em quadraturas de um sistema de equações diferenciais é, então, a procura das suas soluções recorrendo a um número finito de operações algébricas (incluindo a inversão de funções) e ao cálculo de integrais de funções conhecidas.

O Teorema de Liouville, enunciado e demonstrado neste segundo capítulo permite relacionar a integração em quadraturas de sistemas Hamiltonianos com a existência de um conjunto suficientemente rico de **primeiros integrais**. Estes primeiros integrais têm bastante interesse porque nos dão informações físicas sobre o sistema. São relações do tipo

$$f(r, \dot{r}, t) = \text{constante},$$

que são equações diferenciais de primeira ordem. Incluem, por exemplo, as Leis de Conservação referidas do capítulo anterior.

2.1 Teorema de Liouville sobre sistemas integráveis

Para integrar um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias é preciso conhecer $2n$ primeiros integrais. Ocorre, porém, que se for dado um sistema canónico de equações diferenciais, em muitos casos é suficiente conhecer apenas n primeiros integrais, pois cada um deles permite baixar a ordem do sistema, não em uma, mas em duas unidades.

Arnold demonstrou em [2] que, se num sistema com n graus de liberdade, são conhecidos n primeiros integrais independentes em involução, então o sistema é integrável em quadraturas.

Eis o enunciado exacto deste teorema, formulado por Liouville:

Teorema 2.1.1 *Seja M uma variedade simplética $2n$ -dimensional.*

Suponhamos que, em M , são dadas n funções em involução F_1, \dots, F_n , isto é,

$$[F_i, F_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Vejamos o conjunto de nível das funções F_i :

$$M_{f^*} = \{x \in M : F_i(x) = f_i^*; i = 1, \dots, n\}.$$

Suponhamos que, em M_{f^} , as n funções F_i são independentes, ou seja, as n 1-formas dF_i são linearmente independentes em cada ponto de M_{f^*} . Então:*

1. *M_{f^*} é uma variedade lisa e invariante relativamente ao fluxo de fase com a função de Hamilton $H = F_1$.*
2. *Se a variedade M_{f^*} for compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao toro n -dimensional*

$$T^n = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\}.$$

3. *O fluxo de fase com a função de Hamilton H define em M_{f^*} um movimento condicionalmente periódico, ou seja, nas coordenadas angulares $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi$, tem-se*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \text{ com } \omega = \omega(f^*).$$

4. *As equações canónicas com a função de Hamilton H integram-se em quadraturas.*

Antes de passar à demonstração deste teorema, apresentemos um dos seus corolários:

Corolário 2.1.1 *Se num sistema canónico com dois graus de liberdade é conhecido um primeiro integral F , que não depende da função de Hamilton H , então o sistema é integrável em quadraturas; a variedade compacta conexa bidimensional do espaço de fase $H = h^*$, $F = f^*$ é um toro invariante e o movimento nele é condicionalmente periódico.*

Realmente, F e H encontram-se em involução, visto que F é primeiro integral do sistema com a função de Hamilton H .

O número de exemplos de aplicações é elevado, visto que o Teorema de Liouville acima formulado envolve praticamente todos os problemas de dinâmica actualmente integráveis.

2.2 Demonstração do Teorema de Liouville

Iniciamos agora a demonstração do Teorema de Liouville.

Sejam:

- M , variedade simplética de dimensão $2n$;
- $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in M$;
- $F : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$;
- $F_1, \dots, F_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$, n funções em involução, isto é, $[F_i, F_j] = 0$; $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$;
- $f^* = (f_1^*, \dots, f_n^*) \in \mathbb{R}^n$;
- $M_{f^*} = \{x \in M : F_i(x) = f_i^*, i = 1, \dots, n\} = F^{-1}(f^*)$;
- F_i independentes em M_{f^*} , isto é, dF_i ($i = 1, \dots, n$) são linearmente independentes em cada ponto de M_{f^*} .

Demonstração: (Ponto 1)

Sob as hipóteses apresentadas, a matriz jacobiana de F , $D_F = [dF_1 \dots dF_n]$ tem característica n e portanto, pelo Teorema da Função Implícita, F é invertível numa vizinhança de qualquer ponto $x \in M_{f^*}$, consequentemente, n das coordenadas de $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in M_{f^*}$ podem ser escritas em função das restantes n coordenadas.

Sendo M uma variedade, existe uma carta ψ em cada elemento $x \in M$, ou seja, existe uma função injectiva ψ definida numa vizinhança W de x ,

$$\psi : W \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

tal que $\psi(W)$ é aberto de \mathbb{R}^{2n} . Mas então $\psi|$, que denota a restrição de ψ a $W \cap M_{f^*}$, ou seja,

$$\psi| : W \cap M_{f^*} \subseteq M_{f^*} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

é carta em $x \in M_{f^*}$. Portanto, M_{f^*} é variedade e, de acordo com o que foi dito anteriormente, tem dimensão n .

Sabemos que existe um isomorfismo natural entre os campos vectoriais e as 1-formas (conforme capítulo anterior). Seja I esse isomorfismo. Então, a cada 1-forma dF_i corresponde o campo vectorial IdF_i da velocidade de fase com a função de Hamilton F_i . Mostremos, de seguida, que os n campos vectoriais IdF_i são tangentes a M_{f^*} , comutam e são independentes.

Da independência das 1-formas dF_i e da regularidade do isomorfismo I , decorre a independência dos campos IdF_i em cada ponto de M_{f^*} . Os campos IdF_i comutam dois a dois, visto que, por hipótese, as suas funções de Hamilton F_i estão em involução (ou seja, o parêntesis de Poisson das suas funções de Hamilton é igual a zero). Pelo mesmo motivo, a derivada da função F_i segundo a direcção do campo IdF_j é igual a zero para quaisquer $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$. Assim, os campos IdF_i são tangentes a M_{f^*} .

A cada campo vectorial IdF_i está vinculado um fluxo de fase g_i^t com função de Hamilton F_i , vínculo esse que surge da relação:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g_i^t(x) = IdF_i(x).$$

Assim sendo, e atendendo às propriedades previamente demonstradas para os campos vectoriais IdF_i , é fácil concluir-se que a variedade M_{f^*} é invariante em relação a cada um dos n fluxos de fase comutáveis g_i^t com as funções de Hamilton F_i .

□

Demonstração: (Ponto 2)

Pretendemos agora mostrar que, no caso de M_{f^*} ser uma variedade compacta e conexa, é difeomorfa ao toro n -dimensional

$$T^n = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\}.$$

No entanto, para o conseguir, é necessário apresentar e demonstrar pre-

viamente alguns resultados (sob a forma de lemas).

Tal como anteriormente, denotemos por g_i^t , $i = 1, \dots, n$, os fluxos de fase com funções de Hamilton F_i , respectivamente. Uma vez que estes fluxos comutam (como foi provado em 1.), podemos definir uma acção g do grupo comutativo $\mathbb{R}^n = \{t = (t_1, \dots, t_n)\}$ na variedade M_{f*} , isto é,

$$g^t : M_{f*} \longrightarrow M_{f*}$$

tal que

$$g^t = g_1^{t_1} \dots g_n^{t_n}.$$

Se fixarmos (arbitrariamente) um ponto x_0 em M_{f*} , podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_{f*} \\ t &\longmapsto g(t) = g^t x_0, \end{aligned}$$

sob a qual o ponto x_0 é deslocado no tempo t_1 pela trajectória do fluxo $g_1^{t_1}$, em t_2 pela trajectória de $g_2^{t_2}$ e assim sucessivamente.

Mostremos agora que esta aplicação g é sobrejectiva: sendo, por hipótese, M_{f*} uma variedade conexa, é conexa por arcos e portanto existe sempre uma curva que une x_0 a qualquer outro ponto $x \in M_{f*}$. Escolhamos uma cobertura para esta curva, de tal modo que, em cada um dos abertos desta cobertura, g seja um difeomorfismo. Tal escolha é possível, uma vez que, da relação

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g_i^t(x) = Id F_i(x)$$

e sendo as funções F_i , por hipótese, independentes, resulta que, em cada ponto x de M_{f*} ,

$$J_g|_{t=0} \neq 0$$

e portanto, g é um difeomorfismo local em cada ponto considerado.

Desta cobertura é possível extrair um subcobertura finita, uma vez que a variedade M_{f*} é conexa e compacta. Sejam, então,

$$V_1, V_2, \dots, V_n$$

os abertos desta subcobertura. Tomemos agora pontos x_1, x_2, \dots, x_n em M_{f^*} tais que $x_n = x$ e

$$x_i \in V_i \cap V_{i+1}, \text{ com } i = 1, \dots, n-1.$$

Pela sobrejectividade de g em cada uma das intersecções $V_i \cap V_{i+1}$, podemos concluir que

- existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $g^{t_1}(x_0) = x_1$,
- existe $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $g^{t_2}(x_1) = x_2$,
- ...

ou seja, por indução finita, conseguimos determinar $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $g^t(x_0) = x$, o que prova a sobrejectividade de g .

Note-se, no entanto, que g não é bijectiva, já que M_{f^*} é compacta enquanto que \mathbb{R}^n não o é. Estudemos então o conjunto τ das imagens inversas de $x_0 \in M_{f^*}$,

$$\tau = \{t \in \mathbb{R}^n : g^t x_0 = x_0\}.$$

Uma vez que,

$$\begin{aligned} \forall t, s \in \tau \quad g^{t+s} x_0 &= (g^t g^s) x_0 \\ &= g^t (g^s x_0) \\ &= g^t x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

tem-se que $t + s \in \tau$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \forall t \in \tau \quad g^{-t} x_0 &= g^{-t} (g^t x_0) \\ &= (g^{-t} g^t) x_0 \\ &= g^{-t+t} x_0 \\ &= x_0 \end{aligned}$$

donde $-t \in \tau$.

Estas duas condições garantem que τ é um subgrupo de \mathbb{R}^n .

Além disso, se $t \in \tau$ e $x = g^r x_0$, então

$$\begin{aligned} g^t x &= g^t(g^r x_0) \\ &= (g^t g^r) x_0 \\ &= (g^r g^t) x_0 \\ &= g^r(g^t x_0) \\ &= g^r x_0 \\ &= x. \end{aligned}$$

Esta igualdade permite-nos concluir que o conjunto τ definido não depende da escolha do ponto x_0 e portanto todos os conjuntos das imagens inversas de pontos de M_{f^*} têm as propriedades demonstradas para τ .

Mostremos agora o seguinte lema:

Lema 2.2.1 *O conjunto τ definido anteriormente é um conjunto discreto de pontos de \mathbb{R}^n .*

Demonstração:

Sendo τ um subgrupo de \mathbb{R}^n , em particular, $t = 0 \in \tau$. Mostremos que, numa vizinhança U de $t = 0$, não há outros elementos de τ além do próprio zero.

De facto, a independência dos campos vectoriais dF_i garante que

$$J_g|_{t=0} \neq 0,$$

(como, de resto, foi provado em 1.). Assim sendo, e de acordo com o Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança U de 0 e uma vizinhança aberta W de $g(0) = g^0 x_0 = x_0$ tal que $g(U) = W$ onde g admite inversa,

$$g^{-1} : W \longrightarrow U.$$

Admitindo inversa na vizinhança U de 0, g é injectiva nessa vizinhança U , donde nenhum outro ponto de U tem imagem x_0 . Portanto, em U , não há outros elementos de τ além de 0.

Recorrendo a uma adequada translação para a origem, podemos concluir que na vizinhança U de qualquer ponto $t \in \tau$, não há pontos de τ distintos de t . Desta forma, os pontos de τ formam um conjunto discreto, como se pretendia verificar.

□

Seguidamente, mostremos um outro lema:

Lema 2.2.2 *Existem k ($0 \leq k \leq n$) vectores linearmente independentes $e_1, \dots, e_k \in \tau$, tais que τ é precisamente o conjunto de todas as suas combinações lineares inteiras.*

Demonstração:

Se $\tau = \{0\}$, o resultado é trivial (e tem-se $k = 0$).

Se não, existe um ponto $t_0 \in \tau$, ($t_0 \neq 0$). Denotemos por $\mathbb{R}t_0$ a recta que passa simultaneamente nos pontos t_0 e 0 . Mostremos que nesta recta existe um ponto $t_1 \in \tau$, que é o mais próximo de 0 em toda a recta $\mathbb{R}t_0$. De facto, dentro da esfera de raio $\|t_0\|$ com centro em 0 existe apenas um número finito de pontos de τ (uma vez que, de acordo com Lema 2.3.1, τ é discreto).

O ponto mais próximo de 0 , entre o número finito de pontos desta esfera localizados sobre a recta, será simultaneamente o mais próximo de 0 em toda a recta. Denotemos por t_1 esse ponto.

Na recta $\mathbb{R}t_0$ (que coincide com a recta $\mathbb{R}t_1$) pertencem a τ os múltiplos inteiros de t_1 (isto é, mt_1 , em que $m \in \mathbb{Z}$) e apenas estes. Realmente, os pontos mt_1 dividem a recta em partes de comprimento $\|t_1\|$.

Se dentro de uma destas partes (mt_1 a $(m+1)t_1$) existisse um ponto $t \in \tau$, então o ponto $t - mt_1$ também pertenceria a τ (uma vez que τ é subgrupo) e estaria mais próximo de 0 do que t_1 , o que é absurdo.

Se τ não possuir pontos fora da recta $\mathbb{R}t_1$, então $k = 1$, $e_1 = t_1$ e o resultado está demonstrado.

Caso contrário, se existe $t \in \tau$ tal que $t \notin \mathbb{R}t_1$, mostremos que existe $t_2 \in \tau$, que é o ponto mais próximo da recta $\mathbb{R}t_1$ sem estar localizado sobre a mesma.

Para tal, projectemos t ortogonalmente sobre $\mathbb{R}t_1$. Esta projecção fica disposta precisamente num intervalo

$$\Delta = \{\lambda t_1\}, \text{ com } m \leq \lambda < m+1 \text{ e } m \in \mathbb{Z}.$$

Estudemos o cilindro com eixo Δ e raio da base igual à distância de Δ a t . Neste cilindro, existe um número finito de pontos de τ (consequência do Lema 2.3.1). Entre estes pontos, seja t_2 o mais próximo do eixo $\mathbb{R}t_1$, mas não localizado sobre ele.

Note-se que a distância de qualquer outro ponto t de τ a $\mathbb{R}t_1$ não é inferior à distância de t_2 a $\mathbb{R}t_1$. Se fosse, existiria $t - rt_1$, com $r \in \mathbb{Z}$ pertencente a τ (pois τ é subgrupo), dentro do referido cilindro, que estaria mais próximo do eixo $\mathbb{R}t_1$ do que t_2 , o que é absurdo.

Consideremos agora o plano $\mathbb{R}t_1 + \mathbb{R}t_2$. Mostremos que não há outros pontos de τ sobre este plano excepto as combinações lineares inteiras de t_1 e t_2 .

Estas combinações lineares inteiras de t_1 e t_2 dividem o plano em paralelogramos

$$\Delta = \{\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2\}, \text{ com } m_i \leq \lambda_i \leq m_{i+1}, m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2.$$

Se $t \in \Delta$ e $t \neq m_1 t_1 + m_2 t_2$, então $t - m_1 t_1 - m_2 t_2$ ficaria mais próximo de $\mathbb{R}t_1$ do que t_2 , o que é absurdo.

Se τ não tiver pontos fora do plano $\mathbb{R}t_1 + \mathbb{R}t_2$, então tem-se $k = 2$, $e_1 = t_1$ e $e_2 = t_2$ e o resultado está demonstrado.

Caso contrário, se existir um ponto $t \in \tau$ fora deste plano, então existe t_3 , o ponto de τ mais próximo de $\mathbb{R}t_1 + \mathbb{R}t_2$. Tal como anteriormente, as combinações lineares inteiras de t_1 , t_2 e t_3 esgotam todos os pontos de τ no espaço tridimensional. Se ainda existirem pontos de τ fora deste espaço, tomamos o ponto mais próximo t_4 e assim sucessivamente.

Claramente, todos os vectores e_1, \dots, e_k obtidos são linearmente independentes. Uma vez que todos pertencem a \mathbb{R}^n , o seu número k não é maior do que n . Podemos então concluir que τ é formado por todas as combinações lineares inteiras de e_1, \dots, e_k , isto é,

$$\tau = \left\{ \sum m_i e_i : m_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, \dots, k \right\},$$

e o Lema 2.2.2 está demonstrado. □

Voltemos agora a concentrar-nos no objectivo deste segundo ponto: mostrar que M_{f^*} é difeomorfa ao toro n -dimensional

$$T^n = \{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi\}.$$

Seja

$$T^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \{(\varphi \bmod 2\pi, y) = (\varphi_1 \bmod 2\pi, \dots, \varphi_k \bmod 2\pi, y_1, \dots, y_{n-k})\}$$

o produto cartesiano de k circunferências e $n - k$ rectas.

Seja ainda

$$\begin{aligned} p : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow T^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \\ (\varphi, y) &\mapsto p(\varphi, y) = (\varphi \bmod 2\pi, y) \end{aligned}$$

a projecção natural de \mathbb{R}^n em $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Por definição,

$$\text{Ker}(p) = \{(\varphi, y) \in \mathbb{R}^n : p(\varphi, y) = 0\}.$$

Ora tem-se que

$$p(\varphi, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_i = 0 \bmod 2\pi, & \text{para } i = 1, \dots, k \\ y_j = 0, & \text{para } j = k + 1, \dots, n \end{cases}$$

Facilmente se verifica que $\text{Ker}(p)$ tem dimensão k e consequentemente tem k geradores linearmente independentes a_1, \dots, a_k tais que

$$a_i = (0, \dots, 0, 2\pi, 0, \dots, 0), \quad i = 1, \dots, k,$$

ou seja, todas as coordenadas de a_i são zero excepto a i -ésima.

Denotemos agora por

$$b_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) ; \quad j = k + 1, \dots, n,$$

os $n - k$ últimos vectores da base canónica ordenada de \mathbb{R}^n (todas as coordenadas de b_j são zero excepto a j -ésima).

Juntando todos estes vectores, obtemos um conjunto de geradores de \mathbb{R}^n linearmente independentes, ou seja, $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ é base de \mathbb{R}^n . Assim sendo, cada elemento $(\varphi, y) \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito univocamente como combinação linear dos vectores da base referida, ou seja,

$$(\varphi, y) = \sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j), \text{ com } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \text{ e } j = k + 1, \dots, n.$$

Os geradores de τ definidos no Lema 2.2.2., e_1, \dots, e_k , são, como se viu, linearmente independentes. Assim sendo, é possível construir uma base de \mathbb{R}^n que contenha estes vectores. Seja então $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ essa base.

Consideremos agora a aplicação

$$\begin{aligned} A: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\varphi, y) &\mapsto A(\varphi, y) = t, \end{aligned}$$

em que os vectores a_1, \dots, a_k são transformados nos geradores do grupo τ , e_1, \dots, e_k e os vectores b_{k+1}, \dots, b_n nos restantes vectores e_{k+1}, \dots, e_n desta segunda base. Assim, $\forall (\varphi, y) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$\begin{aligned} A(\varphi, y) &= A\left(\sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j)\right) \\ &= \sum \left(\lambda_i A(a_i) + \lambda_j A(b_j)\right) \\ &= \sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j) \end{aligned}$$

Da forma como foi definida, a aplicação A é claramente um isomorfismo.

Com as aplicações g , p e A definidas até agora podemos construir o esquema seguinte:

$$\begin{array}{ccc} (\varphi, y) \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & t \in \mathbb{R}^n \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ z \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k} & & g^t x_0 \in M_{f^*} \end{array}$$

A partir dele, é possível definir uma nova aplicação \tilde{A} entre $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e M_{f^*} como se segue:

Se z é elemento de $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, então a sua pré-imagem

$$p^{-1}(z) = \{(\varphi, y) \in \mathbb{R}^n : p(\varphi, y) = z\}$$

não é um conjunto singular pois p não é injectiva.

Seja (φ, y) um elemento de $p^{-1}(z) \subset \mathbb{R}^n$. Sabemos então que este pode ser escrito univocamente como combinação linear dos vectores da base $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$, ou seja,

$$(\varphi, y) = \sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j), \text{ com } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, j = k + 1, \dots, n.$$

Aplicando A a (φ, y) , vem

$$\begin{aligned} A(\varphi, y) &= A\left(\sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j)\right) \\ &= \sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j); \end{aligned}$$

seguidamente, por g , vem

$$g\left(\sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)\right) = g^{\sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)} x_0.$$

Portanto, definimos $\forall z \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$,

$$\tilde{A}(z) = (g \circ A)(\varphi, y), \text{ com } (\varphi, y) \in p^{-1}(z),$$

ou seja,

$$\tilde{A}(z) = (g \circ A)(p^{-1}(z)).$$

Mostremos que esta aplicação \tilde{A} está bem definida e é um difeomorfismo:

- Para mostrar que \tilde{A} está bem definida, é necessário verificar se a cada elemento $z \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ corresponde uma e uma só imagem por \tilde{A} . No entanto, uma vez que A e g estão bem definidas, basta garantir que $\tilde{A}(z)$ não depende da escolha de $(\varphi, y) \in p^{-1}(z)$. Assim, provemos que $\forall (\varphi, y), (\psi, u) \in p^{-1}(z)$,

$$\tilde{A}(z) \text{ escolhendo } (\varphi, y) = \tilde{A}(z) \text{ escolhendo } (\psi, u),$$

ou seja,

$$(g \circ A)(\varphi, y) = (g \circ A)(\psi, u).$$

Se $(\varphi, y), (\psi, u) \in p^{-1}(z)$, tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \varphi_i \bmod 2\pi = \psi_i \bmod 2\pi, \text{ para } i=1, \dots, k \\ y_j = u_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (\varphi_i - \psi_i) \bmod 2\pi = 0, \text{ para } i=1, \dots, k \\ y_j = u_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi_i = \psi_i + 2\gamma_i\pi, \text{ para } i=1, \dots, k, \gamma_i \in \mathbb{Z} \\ y_j = u_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \varphi_i = \psi_i + a_i\gamma, \text{ para } i=1, \dots, k, \gamma \in \mathbb{Z} \\ y_j = u_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado, como (φ, y) e (ψ, u) são elementos de \mathbb{R}^n , cada um deles pode ser escrito como combinação linear dos vectores da base $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$. Assim,

$$(\varphi, y) = \sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j), \text{ com } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, n$$

e

$$(\psi, u) = \sum (\mu_i a_i + \mu_j b_j), \text{ com } \mu_i, \mu_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, n$$

Atendendo, porém, às relações estabelecidas anteriormente, podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_i = \mu_i + \gamma, \text{ para } i=1, \dots, k, \gamma \in \mathbb{Z} \\ \lambda_j = \mu_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}, \text{ para } i=1, \dots, k \\ \lambda_j - \mu_j = 0, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\sum ((\lambda_i - \mu_i)e_i + (\lambda_j - \mu_j)e_j)$$

é elemento de τ , porque é (apenas) combinação linear inteira de e_1, \dots, e_k (consequência do lema 2.2.2). Então,

$$\begin{aligned} & \sum (\lambda_i - \mu_i)e_i + \sum (\lambda_j - \mu_j)e_j \in \tau \\ \Leftrightarrow & \sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j) - \sum (\mu_i e_i + \mu_j e_j) \in \tau \\ \Leftrightarrow & g^{\sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j) - \sum (\mu_i e_i + \mu_j e_j)} x_0 = x_0 \\ \Leftrightarrow & g^{\sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)} g^{-\sum (\mu_i e_i + \mu_j e_j)} x_0 = x_0 \\ \Leftrightarrow & g^{\sum (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)} x_0 = g^{\sum (\mu_i e_i + \mu_j e_j)} x_0 \\ \Leftrightarrow & (g \circ A)(\varphi, y) = (g \circ A)(\psi, u) \\ \Leftrightarrow & \tilde{A}(z) \big|_{\text{escolhendo } (\varphi, y)} = \tilde{A}(z) \big|_{\text{escolhendo } (\psi, u)}, \end{aligned}$$

o que prova que \tilde{A} está bem definida.

- Mostremos agora que \tilde{A} é injectiva, ou seja, $\forall z_1, z_2 \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$,

$$\tilde{A}(z_1) = \tilde{A}(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Sejam então $z_1, z_2 \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ tais que

$$\tilde{A}(z_1) = \tilde{A}(z_2).$$

Por definição,

$$\tilde{A}(z_1) = (g \circ A)(\varphi_1, y_1) \text{ em que } (\varphi_1, y_1) \in p^{-1}(z_1)$$

e, da mesma forma,

$$\tilde{A}(z_2) = (g \circ A)(\varphi_2, y_2) \text{ em que } (\varphi_2, y_2) \in p^{-1}(z_2).$$

Por outro lado, (φ_1, y_1) e (φ_2, y_2) são elementos de \mathbb{R}^n e portanto podem ser escritos como combinações lineares dos vectores da base $\{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$, ou seja,

$$(\varphi_1, y_1) = \sum (\lambda_i a_i + \lambda_j b_j), \text{ com } \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, n$$

e

$$(\varphi_2, y_2) = \sum (\mu_i a_i + \mu_j b_j), \text{ com } \mu_i, \mu_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k, j = k+1, \dots, n.$$

Temos que

$$\tilde{A}(z_1) = \tilde{A}(z_2)$$

$$\Leftrightarrow (g \circ A)(\varphi_1, y_1) = (g \circ A)(\varphi_2, y_2)$$

Raciocínio análogo ao efectuado no ponto anterior (agora em sentido contrário), mostra que:

$$\tilde{A}(z_1) = \tilde{A}(z_2)$$

$$\Leftrightarrow \sum (\lambda_i - \mu_i) e_i + \sum (\lambda_j - \mu_j) e_j \in \tau$$

Mas então tem-se que

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_i - \mu_i \in \mathbb{Z}, \text{ para } i=1, \dots, k \\ \lambda_j - \mu_j = 0, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \lambda_i = \mu_i + \gamma, \text{ para } i=1, \dots, k, \gamma \in \mathbb{Z} \\ \lambda_j = \mu_j, \text{ para } j=k+1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

Desta relação, e procedendo de forma análoga ao que foi feito anteriormente (novamente em sentido contrário), resulta que

$$\begin{cases} \varphi_1 \bmod 2\pi = \varphi_2 \bmod 2\pi \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Consequentemente,

$$p(\varphi_1, y_1) = p(\varphi_2, y_2)$$

e portanto $z_1 = z_2$, o que garante a injectividade de \tilde{A} .

- Como se viu no capítulo anterior, qualquer que seja $x \in M_{f^*}$ é possível determinar $t_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$g^{t_0}x_0 = x$$

(consequência da já provada sobrejectividade de g). Mas então é possível determinar (φ_0, y_0) tal que

$$A(\varphi_0, y_0) = t_0,$$

(dado que A é um isomorfismo) e consequentemente aplicar p a (φ_0, y_0) para obter

$$z = (\varphi_0 \bmod 2\pi, y_0) \text{ tal que } \tilde{A}(z) = x.$$

É então possível, para cada $x \in M_{f^*}$, determinar $z \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ tal que

$$\tilde{A}(z) = x,$$

o que prova a sobrejectividade de \tilde{A} .

- \tilde{A} é contínua, pois é composição de aplicações contínuas.
- \tilde{A} é invertível (por ser bijectiva) e também a sua inversa, \tilde{A}^{-1} , é contínua.
- Da forma como foi definida, a aplicação p é localmente injectiva, logo, localmente invertível. Atendendo a este facto, podemos dizer que, para cada $z \in T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, p^{-1} é carta em z . Por outro lado, g^{-1} é carta em $\tilde{A}(z) \in M_{f^*}$ e A é diferenciável. Assim sendo, da relação

$$A = g^{-1} \circ \tilde{A} \circ p$$

resulta a diferenciabilidade de \tilde{A} em z . A arbitrariedade de z permite concluir que \tilde{A} é diferenciável e, raciocínio análogo, prova que também \tilde{A}^{-1} o é.

Estando a aplicação \tilde{A} bem definida e provada a sua injectividade, sobrejectividade, continuidade e diferenciabilidade, bem como a continuidade e diferenciabilidade da sua inversa, concluimos que \tilde{A} é um difeomorfismo entre as variedades $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e M_{f^*} .

Sendo M_{f^*} , por hipótese, compacta, deste difeomorfismo resulta que também $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ o terá que ser. Mas para que este produto cartesiano seja compacto, é necessário que todas as suas componentes o sejam e portanto não podemos ter rectas mas apenas circunferências. Assim, obrigatoriamente $k = n$ e portanto $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ passa a ser apenas T^n .

Desta forma M_{f^*} é difeomorfa ao toro n -dimensional T^n (através de \tilde{A}), o que conclui a demonstração do ponto 2.

□

Demonstração: (Ponto 3)

O difeomorfismo entre a variedade M_{f^*} (no caso desta ser conexa e compacta) e o toro n -dimensional T^n provado no ponto 2, permite-nos considerar em M_{f^*} coordenadas $\varphi_1, \dots, \varphi_n \bmod 2\pi$, chamadas coordenadas angulares.

Mostremos agora que, sob a acção do fluxo de fase com função de Hamilton $H = F_1$, o movimento em M_{f^*} é condicionalmente periódico, ou seja, nestas coordenadas angulares $z = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi$, tem-se

$$\frac{dz}{dt} = \omega,$$

em que ω depende da variedade M_{f^*} considerada (ou seja, depende do ponto f^* considerado e portanto escrevemos $\omega = \omega(f^*)$).

O esquema construído no ponto anterior pode agora ser reformulado uma vez que, como se viu, $k = n$.

Assim,

$$\begin{array}{ccc} \varphi \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & t \in \mathbb{R}^n \\ p \downarrow & & \downarrow g \\ z \in T^n & \xrightarrow{\tilde{A}} & g^t x_0 \in M_{f*} \end{array}$$

Seja então x um elemento arbitrário de M_{f*} . Então existe

$$t^0 = (t_1^0, \dots, t_n^0) \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } x = g^{t^0} x_0.$$

De acordo com a notação introduzida no início do capítulo g_1^t , com $t \in \mathbb{R}$, corresponde ao fluxo de fase com função de Hamilton $H = F_1$.

A este fluxo corresponde um movimento em M_{f*} , pois

$$g_1^t = g^{t(1,0,\dots,0)} = g^{tv_1},$$

em que v_1 denota o primeiro vector da base canónica de \mathbb{R}^n , $v_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Aplicando g^{tv_1} a x obtemos

$$\begin{aligned} g^{tv_1} x &= g^{tv_1}(g^{t^0} x_0) \\ &= (g^{tv_1} g^{t^0}) x_0 \\ &= g^{tv_1+t^0} x_0 \\ &= g^{(t+t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0)} x_0 \end{aligned}$$

Desta forma, a cada elemento x em M_{f*} podemos fazer corresponder um outro elemento de M_{f*} , $g^{tv_1} x$, resultante deste movimento, ou seja,

$$x \longmapsto g^{tv_1} x, \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Este movimento em M_{f*} pode ser associado a uma aplicação em \mathbb{R}^n , uma vez que existe uma correspondência entre M_{f*} e \mathbb{R}^n via g .

Portanto, a cada elemento $t^0 = (t_1^0, \dots, t_n^0)$ em \mathbb{R}^n fazemos corresponder, também em \mathbb{R}^n , o elemento $(t + t_1^0, t_2^0, \dots, t_n^0) = tv_1 + t^0$, ou seja,

$$t^0 \longmapsto tv_1 + t^0, \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Sendo A um isomorfismo, também A^{-1} o é e então, por aplicação de A^{-1} , obtemos

$$A^{-1}(t^0) \longmapsto A^{-1}(tv_1 + t^0), \text{ com } t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$A^{-1}(t^0) \longmapsto tA^{-1}(v_1) + A^{-1}(t^0), \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Estando a aplicação A^{-1} bem definida, está garantida a existência de $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $A^{-1}(t^0) = \varphi$; desta forma podemos escrever

$$\varphi \longmapsto tA^{-1}(v_1) + \varphi, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

Denotemos $\omega = A^{-1}(v_1)$, em que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Vem então

$$\varphi \longmapsto t\omega + \varphi, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

A esta aplicação em \mathbb{R}^n , façamos corresponder uma outra, em T^n , por aplicação de p :

$$p(\varphi) \longmapsto p(t\omega + \varphi), \text{ com } t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\varphi \bmod 2\pi \longmapsto (t\omega + \varphi) \bmod 2\pi, \text{ com } t \in \mathbb{R}$$

Por derivação, e fazendo $z \in T^n$ tal que $z = \varphi \bmod 2\pi$, vem

$$\frac{dz}{dt} = \omega.$$

Recordando o difeomorfismo \tilde{A} entre M_{f*} e T^n , fica provado que o movimento em M_{f*} é condicionalmente periódico, como se pretendia demonstrar.

□

Demonstração: (Ponto 4)

Façamos uma rápida recapitulação do que foi feito até agora: verificámos que M_{f^*} , quando considerada variedade conexa e compacta, é difeomorfa a um toro n -dimensional e invariante em relação ao fluxo de fase. Este difeomorfismo permitiu-nos definir em M_{f^*} coordenadas angulares

$$z = \varphi \bmod 2\pi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \bmod 2\pi.$$

De agora em diante, e por uma questão de simplicidade, escreveremos apenas φ em vez de $\varphi \bmod 2\pi$.

Nestas coordenadas, o fluxo de fase com a função de Hamilton $H = F_1$ toma um aspecto particularmente simples, conforme vimos no ponto anterior:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

Dediquemo-nos, de seguida, ao estudo das vizinhanças da variedade M_{f^*} no espaço de fase $2n$ -dimensional. Mostremos, então, que M_{f^*} possui uma vizinhança difeomorfa ao produto cartesiano do toro n -dimensional T^n por uma esfera D^n no espaço euclidiano n -dimensional.

Seja D^n uma esfera suficientemente pequena centrada em $f^* \in \mathbb{R}^n$. Para cada f em D^n , é possível definir

$$M_f = \{x \in M : F(x) = f\}$$

Este conjunto é em tudo análogo a M_{f^*} e portanto tem todas as propriedades que foram demonstradas nos pontos anteriores para M_{f^*} .

Assim sendo, o difeomorfismo \tilde{A} entre M_{f^*} e T^n (definido no ponto 2.) é agora estendido a outros difeomorfismos \tilde{A}_f entre M_f e T^n , para cada $f \in D^n$.

A união das variedades M_f definidas para todos os elementos f de D^n forma uma vizinhança de M_{f^*} . Denotemos esta vizinhança por V . Podemos dizer então que, para cada $x \in V$, existe $F(x) = f \in D^n$ tal que $x \in M_f$.

Com estes pressupostos, é possível definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow T^n \times D^n \\ x &\longmapsto B(x) = (\varphi(x), F(x)) = (\varphi(x), f) \end{aligned}$$

Mostremos, de seguida, que B está bem definida e é um difeomorfismo:

- Para qualquer $x \in V$, existe e é único $F(x) = f \in D^n$ e portanto x é elemento de M_f . Como \tilde{A}_f^{-1} está bem definida, também existe e é único $\tilde{A}_f^{-1}(x) \in T^n$.

Atendendo a que, em T^n , estão definidas coordenadas angulares φ , denotemos $\tilde{A}_f^{-1}(x)$ por $\varphi(x)$. Então, para qualquer $x \in V$ existe e é único

$$B(x) = (\varphi(x), F(x)) \in T^n \times D^n,$$

o que prova que B está bem definida.

- B é também uma aplicação injectiva, uma vez que, $\forall x_1, x_2 \in V$,

$$\begin{aligned} B(x_1) = B(x_2) &\Rightarrow (\varphi(x_1), F(x_1)) = (\varphi(x_2), F(x_2)) \\ &\Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \wedge F(x_1) = F(x_2) \\ &\Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \wedge x_1, x_2 \in M_{f'} \text{ com } f' = F(x_1) = F(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

e portanto $x_1 = x_2$, como se pretendia mostrar.

- Seja $(y_1, y_2) \in T^n \times D^n$.

Naturalmente, $y_2 \in D^n$ e consequentemente a variedade M_{y_2} faz parte da vizinhança V de M_{f^*} .

Por outro lado, $y_1 \in T^n$ e portanto, atendendo ao difeomorfismo \tilde{A}_{y_2} entre T^n e M_{y_2} , $\tilde{A}_{y_2}(y_1)$ é elemento de M_{y_2} . Denotemos por x este elemento.

Da forma como x foi definido, é fácil ver que

$$B(x) = (\varphi(x), F(x)) = (y_1, y_2),$$

uma vez que, conforme notação anterior,

$$y_1 = \tilde{A}_{y_2}^{-1}(x) = \varphi(x).$$

Está, então, garantida a sobrejectividade de B .

- B é contínua, uma vez que, qualquer que seja f , \tilde{A}_f^{-1} e F o são.
- B é invertível (por ser bijectiva) e a sua inversa, B^{-1} , também é contínua.
- B é diferenciável, dado que também o são F e \tilde{A}_f^{-1} , e o mesmo acontece para B^{-1} .

Conclui-se assim que B é, de facto, um difeomorfismo e portanto M_{f*} possui uma vizinhança V que é difeomorfa ao produto cartesiano do toro n -dimensional T^n por uma esfera n -dimensional D^n do espaço euclidiano. Este difeomorfismo permite, como vimos, considerar na vizinhança da variedade M_{f*} coordenadas (φ, F) . Nestas coordenadas, o fluxo de fase com a função de Hamilton $H = F_1$ pode ser escrito na forma de um sistema particularmente simples de $2n$ equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(F) \wedge \frac{dF}{dt} = 0$$

que é facilmente integrável:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(F(0))t \wedge F(t) = F(0)$$

Deste modo, para integrar explicitamente o sistema canónico inicial de equações diferenciais é suficiente encontrar de forma explícita as variáveis φ . Tal é possível usando apenas quadraturas.

□

Fica, então, concluída a demonstração do Teorema de Liouville.

Note-se, porém, que as variáveis (φ, F) definidas no ponto 4, em geral, não constituem coordenadas simpléticas. No entanto, é possível determinar funções de F , designemo-las por $I = I(F)$, tais que as variáveis (φ, I) já constituem coordenadas simpléticas. Nestas coordenadas, a estrutura simplética inicial ω^2 é expressa segundo a fórmula comum

$$\omega^2 = \sum dI_i \wedge d\varphi_i.$$

As variáveis I denominam-se **variáveis de acção** e, juntamente com as **variáveis angulares** φ formam, na vizinhança da variedade M_{f^*} , um **sistema de coordenadas canónicas acção-ângulo**.

Capítulo 3

O problema da dispersão de um sistema de partículas numa recta

Nos primórdios da mecânica clássica, a integração das equações diferenciais do movimento era o objectivo principal de todos os estudiosos. Entre eles, encontrava-se Liouville, conforme prova o teorema apresentado e demonstrado no capítulo anterior.

No entanto, este desenvolvimento sofreu uma enorme quebra quando Poincaré demonstrou que a grande maioria dos sistemas Hamiltonianos não era integrável, e apresentou argumentos que justificavam a não integrabilidade do problema dos três corpos rígidos. Na mesma direcção foi o trabalho de Burn, que descobriu que o problema dos três corpos rígidos não tinha integral algébrico, excepto nos casos clássicos já conhecidos e nos resultantes de funções algébricas dos mesmos.

Apesar da integrabilidade ser uma propriedade exclusiva de uma pequena parte dos sistemas Hamiltonianos, vários matemáticos continuam a dirigir o seu trabalho para o estudo destes raros exemplos. O problema da dispersão de um sistema de partículas numa recta, estudado por Moser em [7] e que se apresenta neste capítulo, é um destes casos.

3.1 Caracterização do movimento de um sistema de partículas numa recta

Consideremos um sistema de duas partículas de igual massa numa recta, definido por

$$\ddot{x}_k = -U_{x_k}, \quad k = 1, 2,$$

em que $U = U(x_1 - x_2)$ é a **energia potencial** ou simplesmente **potencial** definido no Capítulo 1. Facilmente se pode concluir que este problema se reduz a um sistema de uma só partícula, bastando para isso observar que o centro de massa depende linearmente de t .

Assim, se fizermos

$$x = x_1 - x_2,$$

tem-se que:

$$U_{x_1} = U_x \frac{\partial x}{\partial x_1} = U_x$$

e

$$U_{x_2} = U_x \frac{\partial x}{\partial x_2} = -U_x$$

e portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \\ &= -U_{x_1} - (-U_{x_2}) \\ &= -U_{x_1} + U_{x_2} \\ &= -U_x - U_x \\ &= -2U_x \end{aligned}$$

De agora em diante, suponhamos que U é continuamente diferenciável. Desta forma, e da equação

$$\ddot{x} = -2U_x,$$

resulta que

$$\ddot{x}\dot{x} = -2U_x \dot{x},$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{x}^2 &= -2U + \text{const} \\ \Leftrightarrow \dot{x}^2 &= -4U + 2\text{const} \\ \Leftrightarrow \dot{x}^2 + 4U &= \text{const}.\end{aligned}$$

Suponhamos também que lidamos com forças repelentes, ou seja,

$$U'(x) < 0, \text{ com } a < x < \infty,$$

em que a pode ser igual a $-\infty$. Além disso, suponhamos ainda que

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0 \text{ e } \int_{a+1}^{+\infty} U dx < \infty.$$

Estes pressupostos permitem-nos tirar algumas conclusões:

- Da equação

$$\dot{x}^2 + 4U = \text{const},$$

e atendendo a que $\dot{x}^2 \geq 0$, tem-se que

$$4U(x(t)) \leq \text{const}.$$

Podemos daqui concluir que $U(x(t))$ é limitada para todos os valores de t em que esteja definida; exceptua-se, no entanto, o caso $x = a$, dado que, por suposição,

$$\lim_{x \rightarrow a} U(x) = +\infty.$$

- $x(t)$ é uma função convexa de t , uma vez que

$$\ddot{x} = -2U'(x) > 0.$$

- Também da equação

$$\dot{x}^2 + 4U = \text{const},$$

resulta que

$$\dot{x}(t)^2 \leq \text{const}$$

qualquer que seja o valor de t no qual a solução esteja definida. Mas esta condição obriga a que $x(t)$ não admita assíntotas verticais e consequentemente a solução $x(t)$ terá que estar definida para todos os valores reais t .

- Relativamente ao comportamento da solução $x(t)$ no infinito, e sendo ela convexa, temos apenas duas hipóteses: ou

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \infty$$

ou $x(t)$ é monótona decrescente.

Esta segunda hipótese implicaria que

$$x(t) \leq x(0) \text{ para } t \geq 0;$$

no entanto, como $x > a$, ter-se-ia $x - a > p$ para algum $p > 0$.

Desta forma,

$$a + p \leq x(t) \leq x(0) \text{ para } t \geq 0.$$

Atendendo a que $-U'(x)$ é limitada inferiormente por um valor, digamos, $b > 0$, neste intervalo fechado, ter-se-ia

$$\ddot{x} = -2U'(x) > 2b > 0, \text{ para } t \geq 0.$$

Ora este facto contraria a hipótese de x ser monótona decrescente uma vez que, neste caso, necessariamente

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ddot{x} = 0.$$

Isto implica então que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \infty$$

o mesmo acontecendo quando $t \rightarrow -\infty$.

Todas as soluções $x(t)$, sendo convexas e tendendo para infinito quando $t \rightarrow \pm\infty$, têm um único mínimo, digamos, $x(t_0)$.

Com uma adequada translação para a origem, podemos considerar que este mínimo acontece quando $t_0 = 0$ e assim $x(0)$ é mínimo de x , donde

$$\dot{x}(0) = 0.$$

É então óbvio que $x(-t) = x(t)$ e conseqüentemente $x(t)$ é uma função par.

Estudemos agora o comportamento assintótico desta solução quando $t \rightarrow \pm\infty$: atendendo a que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0,$$

a equação

$$\dot{x}^2 + 4U = \text{const}$$

permite-nos dizer que \dot{x}^2 tem limite, que denotaremos por $\dot{x}(\infty)^2$; assim,

$$\dot{x}^2 + 4U(x) = \dot{x}(\infty)^2, \text{ onde } \dot{x}(\infty) > 0.$$

Provaremos, de seguida, que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \dot{x}(\infty)t) = \delta,$$

em que δ é chamada **diferença de fase** e, em geral, depende de $\dot{x}(\infty)$.

Uma vez que a solução é par, será claro que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t) - \dot{x}(-\infty)t) = \delta$$

e portanto não temos que distinguir duas diferenças de fase.

A demonstração é simples, uma vez que a equação

$$\dot{x}^2 + 4U = \text{const}$$

pode ser resolvida explicitamente e, na sua resolução, encontramos também uma expressão para δ .

3.2 Determinação da diferença de fase a partir do potencial

Seja, então,

$$x = V(y), \text{ com } 0 < y < \infty$$

a função inversa de

$$y = 4U(x).$$

Das condições inicialmente impostas a U , resulta que $V(y)$ é uma função monótona decrescente e

$$\lim_{y \rightarrow 0} V(y) = \infty$$

Como $x(t)$ é monótona crescente para $t > 0$ (logo injectiva), podemos considerar t como função de x e portanto t como função de y , para $y > 0$. Então

$$\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dy}$$

$$\Leftrightarrow V'(y) = 1 \dot{x} \frac{dt}{dy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dt}{dy} = \dot{x}^{-1} V'(y)$$

Se $x_0 < x$, da equação

$$\ddot{x} = -2U_x$$

resulta que

$$\dot{x}^2 = -4U(x) + 4U(x_0) = -y + y_0,$$

em que denotamos $y_0 = 4U(x_0)$.

Então, para $0 < y < y_0$, tem-se

$$\frac{dt}{dy} = (-y + y_0)^{-1/2} V'(y)$$

donde

$$t(y) = - \int_y^{y_0} (-s + y_0)^{-1/2} V'(s) ds.$$

Note-se agora que, por um lado, tem-se

$$\dot{x}^2 = -y + y_0;$$

por outro lado,

$$\dot{x}^2 + 4U(x) = \dot{x}(\infty)^2$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}^2 = -y + \dot{x}(\infty)^2.$$

Podemos então concluir que

$$\dot{x}(\infty)^2 = y_0.$$

Neste contexto,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \dot{x}(\infty)t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - y_0^{1/2}t)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} (V(y) - y_0^{1/2}t),$$

Por outro lado, tínhamos visto já que

$$t(y) = - \int_y^{y_0} (y_0 - s)^{-1/2} V'(s) ds$$

$$\Leftrightarrow t(y) = -y_0^{-1/2} \int_y^{y_0} \left(\frac{y_0 - s}{y_0}\right)^{-1/2} V'(s) ds$$

$$\Leftrightarrow y_0^{1/2} t(y) = - \int_y^{y_0} \left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} V'(s) ds + \int_y^{y_0} V'(s) ds - \int_y^{y_0} V'(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y_0^{1/2}t(y) = - \int_y^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} V'(s) - V'(s) \right) ds - [V(s)]_y^{y_0} \\
&\Leftrightarrow y_0^{1/2}t(y) = - \int_y^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(s) ds - V(y_0) + V(y) \\
&\Leftrightarrow y_0^{1/2}t(y) - V(y) = -V(y_0) - \int_y^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(s) ds \\
&\Leftrightarrow V(y) - y_0^{1/2}t(y) = V(y_0) + \int_y^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(s) ds
\end{aligned}$$

Repare-se agora que, quando $y \rightarrow 0$,

$$\int_y^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(s) ds$$

converge para

$$\int_0^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s).$$

Então,

$$\lim_{y \rightarrow 0} (V(y) - y_0^{1/2}t) = V(y_0) + \int_0^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s),$$

e portanto existe e é finito o limite considerado, limite esse que podemos designar por δ , ou seja,

$$\delta = V(y_0) + \int_0^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0}\right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s)$$

Facilmente se vê que δ é função de y_0 ,

$$\delta = \delta(y_0) = \delta(\dot{x}(\infty)^2).$$

e é contínua para $y_0 > 0$.

Apresentam-se, de seguida, dois exemplos concretos de determinação da diferença de fase a partir do potencial.

Exemplo 3.2.1 Para o potencial de expressão

$$U(x) = e^{-x}, \text{ com } x \in \mathbb{R},$$

tem-se que

$$y = 4U(x) = 4e^{-x}$$

donde

$$x = -\ln \frac{y}{4},$$

e portanto,

$$V(y) = -\ln \frac{y}{4}.$$

Daqui resulta que

$$dV = -\frac{1}{y}dy$$

e então

$$\begin{aligned}\delta(y) &= -\ln \frac{y}{4} + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) \left(-\frac{1}{s} ds \right) \\ &= -\ln \frac{y}{4} - \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) \frac{1}{s} ds\end{aligned}$$

Considerando agora a variável

$$t = \frac{s}{y},$$

tem-se que

$$s = ty$$

e consequentemente

$$ds = ydt,$$

donde resulta

$$\begin{aligned}\delta(y) &= -\ln \frac{y}{4} - \int_0^1 \left((1-t)^{-1/2} - 1 \right) \frac{1}{ty} y dt \\ &= -\ln \frac{y}{4} - \int_0^1 \left((1-t)^{-1/2} - 1 \right) \frac{1}{t} dt\end{aligned}$$

Com uma nova mudança de variável, desta vez fazendo

$$t = \cos^2 \alpha,$$

e portanto

$$dt = -2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha,$$

tem-se

$$\begin{aligned} \delta(y) &= -\ln \frac{y}{4} - \int_{\pi/2}^{\pi} \left((1 - \cos^2 \alpha)^{-1/2} - 1 \right) \frac{1}{\cos^2 \alpha} (-2 \sin \alpha \cos \alpha) d\alpha \\ &= -\ln \frac{y}{4} - \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right) \left(-\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) d\alpha \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) d\alpha \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (\sec \alpha - \tan \alpha) d\alpha \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \left[\ln |\sec \alpha + \tan \alpha| + \ln |\cos \alpha| \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \left[\ln |(\sec \alpha + \tan \alpha) \cos \alpha| \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \left[\ln |1 + \sin \alpha| \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \left[\ln |1 + \sin \pi| - \ln |1 + \sin \pi/2| \right] \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2 \left[\ln |1 + 0| - \ln |1 + 1| \right] \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2(\ln 1 - \ln 2) \\ &= -\ln \frac{y}{4} + 2(0 - \ln 2) \\ &= -\ln \frac{y}{4} - 2 \ln 2 \\ &= -\ln y - \ln 4 - \ln 2^2 \\ &= -\ln y + \ln 4 - \ln 4 \\ &= -\ln y \end{aligned}$$

Exemplo 3.2.2 Para o potencial de expressão

$$U(x) = \frac{1}{x^2}, \text{ com } x \in \mathbb{R}^+,$$

tem-se que

$$y = 4U(x) = \frac{4}{x^2}$$

donde

$$x = \frac{2}{\sqrt{y}} = 2y^{-1/2},$$

e portanto,

$$V(y) = 2y^{-1/2}.$$

Daqui resulta que

$$dV = -y^{-3/2}dy$$

e então

$$\begin{aligned}\delta(y) &= 2y^{-1/2} + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) (-s^{-3/2}ds) \\ &= 2y^{-1/2} - \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) (s^{-3/2}ds)\end{aligned}$$

Considerando agora a variável

$$t = \frac{s}{y},$$

tem-se que

$$s = ty$$

e consequentemente

$$ds = ydt,$$

donde resulta

$$\begin{aligned}\delta(y) &= 2y^{-1/2} - \int_0^1 \left((1-t)^{-1/2} - 1 \right) (ty)^{-3/2} y dt \\ &= 2y^{-1/2} - \int_0^1 \left((1-t)^{-1/2} - 1 \right) t^{-3/2} y^{-1/2} dt\end{aligned}$$

$$= 2y^{-1/2} - y^{-1/2} \int_0^1 \left((1-t)^{-1/2} - 1 \right) t^{-3/2} dt$$

Com uma nova mudança de variável, desta vez fazendo

$$t = \cos^2 \alpha,$$

e portanto

$$dt = -2 \sin \alpha \cos \alpha \, d\alpha,$$

tem-se

$$\begin{aligned} \delta(y) &= 2y^{-1/2} - y^{-1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left((1 - \cos^2 \alpha)^{-1/2} - 1 \right) (\cos^2 \alpha)^{-3/2} (-2 \sin \alpha \cos \alpha) d\alpha \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left((\sin^2 \alpha)^{-1/2} - 1 \right) (\cos^2 \alpha)^{-3/2} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 1 \right) (\cos \alpha)^{-2} \sin \alpha d\alpha \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) d\alpha \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sec^2 \alpha + \frac{-\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) d\alpha \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \left[\tan \alpha + \frac{-1}{\cos \alpha} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} \left[\frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2y^{-1/2} + 2y^{-1/2} 1 \\ &= 4y^{-1/2} \end{aligned}$$

3.3 O problema inverso: formulação do teorema

Concentremo-nos, de seguida, no problema inverso: o de reconstruir $U(x)$ quando $\delta(y)$ é conhecido.

Este problema requer a inversão da equação integral linear

$$\delta = V(y_0) + \int_0^{y_0} \left(\left(1 - \frac{s}{y_0} \right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s),$$

e, assumindo que $V(y)$ é monótona, considerar a sua inversa.

Uma solução desta equação integral pode ser explicitamente determinada: assumindo que $\delta(y)$ é dada no intervalo $0 < y \leq y_1$, encontramos uma solução $V(y)$ no mesmo intervalo da forma

$$V(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y (y-t)^{-1/2} t^{-1/2} \delta(t) dt.$$

Para garantir a existência deste integral teremos que impôr algumas condições a $\delta(y)$ na vizinhança de $y = 0$. Além disso, será suficiente assumir que $\delta(y)$ é uma função monótona decrescente para que $V(y)$ tenha a mesma propriedade.

O teorema que se apresenta de seguida, formulado e demonstrado por Moser em [7], apresenta as condições que é necessário impôr a $\delta(y)$ e garante que, de facto, a expressão apresentada acima é solução deste problema. Neste teorema consideram-se válidas as condições apresentadas na secção anterior.

Teorema 3.3.1 *Seja $\delta(y)$ uma função que se supõe continuamente diferenciável para $0 < y \leq y_1$ tal que*

$$\int_0^{y_1} y^\gamma |d\delta(y)| < \infty \text{ para algum } \gamma < \frac{1}{2}.$$

Então a expressão

$$\frac{1}{\pi} \int_0^y (y-t)^{-1/2} t^{-1/2} \delta(t) dt$$

define uma função continuamente diferenciável $V(y)$ que satisfaz a condição

$$\delta(y) = V(y) + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s),$$

e

$$\int_0^{y_1} y^\gamma |dV(y)| < \infty.$$

Além disso, se $\delta(y)' < 0$, então

$$V'(y) < 0 \text{ e } V(y) \geq \delta(y).$$

Portanto, se se verificar

$$\int_0^{y_1} y^\gamma |d\delta(y)| < \infty \text{ para algum } \gamma < \frac{1}{2},$$

$$\delta'(y) < 0,$$

e

$$\delta(y) \rightarrow \infty \text{ quando } y \rightarrow 0,$$

obtemos uma função $V(y)$ com as mesmas propriedades de $\delta(y)$ e consequentemente um potencial monótono decrescente $U(x) > 0$, tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x) = 0$$

e

$$\int^\infty U(x)^\gamma dx < \infty.$$

Refira-se que este teorema pode ser provado em condições mais gerais mas, no contexto deste trabalho, consideramos aceitáveis as restrições impostas e os resultados obtidos.

3.4 Demonstração do teorema

Consideremos então

$$V(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y (y-t)^{-1/2} t^{-1/2} \delta(t) dt.$$

Nele, façamos a mudança de variável

$$t = sy,$$

e consequentemente,

$$dt = y ds.$$

Então

$$\begin{aligned} V(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (y-sy)^{-1/2} (sy)^{-1/2} \delta(sy) y ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 y^{-1/2} (1-s)^{-1/2} y^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy) y ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy) ds \end{aligned}$$

Restringindo-nos a $\delta \in C^1[0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} V'(y) &= \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy) ds \right)' \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 ((1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy))' ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta'(sy) s ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(sy) ds. \end{aligned}$$

Seja

$$\delta^*(y) = V(y) + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) dV(s).$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\delta^*(y) &= V(y) + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{s}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(s) ds \\ &= V(y) + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) V'(t) dt,\end{aligned}$$

em que na última igualdade foi apenas trocada a variável s pela variável t .

Substituindo agora na expressão de δ^* a expressão previamente determinada para V' , vem

$$\begin{aligned}\delta^*(y) &= V(y) + \int_0^y \left(\left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} - 1 \right) \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt \\ &= V(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^y \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt \\ &= V(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt\end{aligned}$$

Dediquemo-nos agora apenas ao segundo integral desta igualdade, ou seja,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt.$$

Então:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^y (1-s)^{-1/2} s^{1/2} s^{-1} s \delta'(st) dt ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \int_0^y s \delta'(st) dt ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} [\delta(st)]_0^y ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} (\delta(sy) - \delta(0)) ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy) ds - \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(0) ds
\end{aligned}$$

Ora como

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} \delta(sy) ds = V(y),$$

concluimos que

$$\begin{aligned}
\delta^*(y) &= V(y) + \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt - \\
&\quad - V(y) + \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt + \\
&\quad + \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds
\end{aligned}$$

Dediquemos-nos, novamente, apenas ao segundo integral desta igualdade:

$$\delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds.$$

Nele, procedamos à mudança de variável

$$s = \sin^2 \alpha,$$

donde resulta

$$ds = 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha$$

e portanto

$$\begin{aligned}
& \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1-s)^{-1/2} s^{-1/2} ds \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 \alpha)^{-1/2} (\sin^2 \alpha)^{-1/2} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \alpha)^{-1/2} (\sin^2 \alpha)^{-1/2} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \alpha} \frac{1}{\sin \alpha} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2 d\alpha \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} [2\alpha]_0^{\pi/2} \\
&= \delta(0) \frac{1}{\pi} (\pi - 0) \\
&= \delta(0)
\end{aligned}$$

Voltando novamente à expressão de $\delta^*(y)$, tem-se que

$$\delta^*(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_0^1 \left(1 - \frac{t}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(st) ds dt + \delta(0).$$

Uma nova mudança de variável, desta vez fazendo

$$t = xy,$$

e portanto

$$dt = y dx,$$

leva a que:

$$\begin{aligned}
\delta^*(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 (1-x)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(sxy) y ds dx + \delta(0) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(sty) y ds dt + \delta(0).
\end{aligned}$$

Desta vez, fazendo

$$t = \frac{r}{sy}$$

e

$$dt = \frac{1}{sy} dr,$$

vem

$$\begin{aligned}\delta^*(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{sy} \left(1 - \frac{r}{sy}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'\left(sy \frac{r}{sy}\right) y \frac{1}{sy} dr ds + \delta(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{sy} \left(\frac{1}{s} \left(s - \frac{r}{y}\right)\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(r) \frac{1}{s} dr ds + \delta(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{sy} s^{1/2} \left(s - \frac{r}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} s^{1/2} \delta'(r) \frac{1}{s} dr ds + \delta(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{sy} \left(s - \frac{r}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} \delta'(r) dr ds + \delta(0)\end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração, obtém-se:

$$\begin{aligned}\delta^*(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^y \int_{r/y}^1 \left(s - \frac{r}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} \delta'(r) ds dr + \delta(0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^y \left\{ \int_{r/y}^1 \left(s - \frac{r}{y}\right)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} ds \right\} \delta'(r) dr + \delta(0) \\ &= \int_0^y \phi\left(\frac{r}{y}\right) \delta'(r) dr + \delta(0)\end{aligned}$$

em que

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma}^1 (s - \sigma)^{-1/2} (1-s)^{-1/2} ds.$$

Mostremos, de seguida, que $\phi(\sigma) \equiv 1$.

Para tal, recorremos à transformada de Fourier,

$$t = \frac{s - \sigma}{1 - \sigma}$$

para fazer a mudança de variável

$$s = (1 - \sigma)t + \sigma,$$

e portanto

$$ds = (1 - \sigma)dt.$$

Daqui resulta

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^1 (s - \sigma)^{-1/2} (1 - s)^{-1/2} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left((1 - \sigma)t + \sigma - \sigma \right)^{-1/2} \left(1 - (1 - \sigma)t - \sigma \right)^{-1/2} (1 - \sigma) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left((1 - \sigma)t \right)^{-1/2} \left((1 - \sigma)(1 - t) \right)^{-1/2} (1 - \sigma) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (1 - \sigma)^{-1/2} t^{-1/2} (1 - \sigma)^{-1/2} (1 - t)^{-1/2} (1 - \sigma) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 t^{-1/2} (1 - t)^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

Fazendo agora

$$t = \sin^2 \alpha,$$

e consequentemente

$$dt = 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha,$$

ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \alpha)^{-1/2} (1 - \sin^2 \alpha)^{-1/2} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \alpha)^{-1/2} (\cos^2 \alpha)^{-1/2} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin \alpha)^{-1} (\cos \alpha)^{-1} 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2 d\alpha \\ &= \frac{1}{\pi} [2\alpha]_0^{\pi/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}(\pi - 0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Provado que está o facto de $\phi(\sigma) \equiv 1$, podemos finalmente concluir que:

$$\begin{aligned}
\delta^*(y) &= \int_0^y \delta'(r)dr + \delta(0) \\
&= [\delta(r)]_0^y + \delta(0) \\
&= \delta(y) - \delta(0) + \delta(0) \\
&= \delta(y),
\end{aligned}$$

o que confirma que a expressão inicialmente apresentada para $V(y)$ é válida, quando $\delta \in C^1[0, 1]$, e conclui a demonstração do teorema.

Capítulo 4

Integração por Deformação Isospectral. A conjectura de Marchioro

Tal como foi dito no capítulo anterior, a integrabilidade de sistemas Hamiltonianos não é uma propriedade genérica; pelo contrário, é destruída por ligeiras perturbações no Hamiltoniano.

Descobertas recentes, porém, alimentam o estudo dos casos excepcionais. Uma delas diz respeito à descoberta de Calogero de que o problema quântico de n partículas numa recta que interagem por acção de um potencial proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as partículas pode ser resolvido explicitamente. Mais, conjecturou que o correspondente problema clássico também devia ser integrável. Este facto foi provado explicitamente por Marchioro para o problema dos três corpos. Além disso, Calogero usou a sua fórmula para estudar o problema da dispersão associado ao sistema de n partículas quânticas, e mostrou que a dispersão é essencialmente trivial, no sentido de que as partículas se comportam assintoticamente como massas pontuais num sistema com movimento elástico.

Neste capítulo, em vez do problema teórico quântico de Calogero, consideramos o problema clássico e mostramos que é um sistema Hamiltoniano in-

tegrável, ou seja, que possui n integrais independentes em involução, definidos em todo o espaço de fase. Para isso, recorremos ao Método de Integração por Deformação Isospectral, desenvolvido por P. D. Lax e utilizado por Moser em [6]. Caracterizamos, ainda, o seu *estranho* comportamento assintótico conjecturado por Marchioro.

4.1 Deformações Isospectrais

Para conseguir deformações isospectrais, Lax considerou equações diferenciais da forma

$$\frac{d}{dt}L = BL - LB,$$

ou seja,

$$L' = BL - LB,$$

em que $L = L(t)$ e $B = B(t)$ são matrizes $n \times n$.

Seja U uma matriz $n \times n$ tal que

$$\frac{d}{dt}U = BU, \text{ com } U(0) = I,$$

ou seja,

$$U' = BU, \text{ com } U(0) = I.$$

Nestas condições, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U^{-1}LU) &= (U^{-1}LU)' \\ &= (U^{-1})'LU + U^{-1}L'U + U^{-1}LU'. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} U^{-1}U &= I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (U^{-1}U)' &= 0 \\ \Leftrightarrow (U^{-1})'U + U^{-1}U' &= 0 \\ \Leftrightarrow (U^{-1})'U &= -U^{-1}U' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (U^{-1})' = -U^{-1}U'U^{-1},$$

podemos substituir $(U^{-1})'$ por esta expressão na igualdade anterior para obter:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U^{-1}LU) &= (U^{-1})'LU + U^{-1}L'U + U^{-1}LU' \\ &= -U^{-1}U'U^{-1}LU + U^{-1}L'U + U^{-1}LU'. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$U' = BU,$$

e

$$L' = BL - LB.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U^{-1}LU) &= -U^{-1}U'U^{-1}LU + U^{-1}L'U + U^{-1}LU' \\ &= -U^{-1}BUU^{-1}LU + U^{-1}L'U + U^{-1}LBU \\ &= -U^{-1}BLU + U^{-1}(BL - LB)U + U^{-1}LBU \\ &= -U^{-1}BLU + U^{-1}BLU - U^{-1}LBU + U^{-1}LBU \\ &= 0 \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}LU) = 0,$$

donde

$$U^{-1}LU = L(0),$$

e portanto

$$L = UL(0)U^{-1}.$$

Seja λ_k um valor próprio de $L(0)$. Então existe v_k tal que

$$L(0)v_k = \lambda_k v_k,$$

ou seja, v_k é um vector próprio de $L(0)$ associado a λ_k . Tem-se então que

$$\begin{aligned}
 L(Uv_k) &= LUv_k \\
 &= (UL(0)U^{-1})Uv_k \\
 &= UL(0)(U^{-1}U)v_k \\
 &= UL(0)v_k \\
 &= U\lambda_kv_k \\
 &= \lambda_kUv_k,
 \end{aligned}$$

e portanto λ_k também é valor próprio de L (sendo, neste caso, Uv_k o vector próprio associado a λ_k). Podemos daqui concluir que os valores próprios de L são invariantes em relação ao tempo.

O polinómio característico de L ,

$$\delta(\lambda) = \det(\lambda I - L)$$

é também ele próprio invariante em relação ao tempo e pode ser escrito na forma

$$\delta(\lambda) = \lambda^n + I_1\lambda^{n-1} + \dots + I_n.$$

Se $L = L(t)$ for a matriz associada a um sistema mecânico, então I_1, \dots, I_n são primeiros integrais desse sistema.

É nesta ideia de procurar integrais do movimento nos valores próprios do operador linear associado a um sistema que se baseia o método de P. D. Lax. Vejamos como pode ser aplicado no problema da dispersão.

4.2 Deformações Isospectrais no problema da dispersão de n partículas numa recta

Consideremos n partículas numa recta com coordenadas x_1, \dots, x_n , sob a influência do potencial

$$U(x) = \sum_{k < l} \frac{1}{(x_k - x_l)^2} \text{ com } k, l = 1, \dots, n.$$

Este sistema, cujas equações do movimento são dadas por

$$\ddot{x}_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} = 2 \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^{-3}, \quad k = 1, \dots, n$$

é claramente um sistema Hamiltoniano: o seu hamiltoniano é

$$H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2 + U,$$

em que $y_k = \dot{x}_k$.

Pelo método das deformações isospectrais, mostraremos que este sistema Hamiltoniano é integrável, ou seja, possui n integrais independentes I_1, \dots, I_n definidos no espaço de fase e em involução.

Para tal, consideremos as matrizes $L = (L_{kl})$ e $B = (B_{kl})$ definidas por

$$L = \begin{cases} L_{kk} = y_k \\ L_{kl} = \frac{i}{x_k - x_l} \quad k \neq l \end{cases}$$

e

$$B = \begin{cases} B_{kk} = \sum_{j \neq k} \frac{i}{(x_k - x_j)^2} \\ B_{kl} = -\frac{i}{(x_k - x_l)^2} \quad k \neq l \end{cases}$$

em que i representa a unidade imaginária, $i = \sqrt{-1}$.

O sistema de equações

$$\begin{cases} y_k = -\dot{x}_k \\ \dot{y}_k = -2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{(x_k - x_j)^3} \end{cases},$$

que define o movimento das n partículas consideradas, é solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}L = BL - LB.$$

Façamos a demonstração desta afirmação para o caso tridimensional, ou seja, para $n = 3$:

Neste caso, consideramos 3 partículas numa recta com coordenadas x_1, x_2 , e x_3 sob a acção do potencial

$$U(x) = \sum_{k < l} \frac{1}{(x_k - x_l)^2} = \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{(x_1 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_3)^2}.$$

A matriz L é

$$L = \begin{pmatrix} y_1 & \frac{i}{x_1 - x_2} & \frac{i}{x_1 - x_3} \\ \frac{i}{x_2 - x_1} & y_2 & \frac{i}{x_2 - x_3} \\ \frac{i}{x_3 - x_1} & \frac{i}{x_3 - x_2} & y_3 \end{pmatrix}$$

donde

$$\frac{d}{dt}L = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 & -\frac{i(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{(x_1 - x_2)^2} & -\frac{i(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{(x_1 - x_3)^2} \\ -\frac{i(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{(x_2 - x_1)^2} & \dot{y}_2 & -\frac{i(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)}{(x_2 - x_3)^2} \\ -\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)}{(x_3 - x_1)^2} & -\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)}{(x_3 - x_2)^2} & \dot{y}_3 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a matriz B é

$$B = \begin{pmatrix} \frac{i}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{i}{(x_1 - x_3)^2} & -\frac{i}{(x_1 - x_2)^2} & -\frac{i}{(x_1 - x_3)^2} \\ -\frac{i}{(x_2 - x_1)^2} & \frac{i}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{i}{(x_2 - x_3)^2} & -\frac{i}{(x_2 - x_3)^2} \\ -\frac{i}{(x_3 - x_1)^2} & -\frac{i}{(x_3 - x_2)^2} & \frac{i}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{i}{(x_3 - x_2)^2} \end{pmatrix}.$$

A equação matricial

$$\frac{d}{dt}L = BL - LB,$$

é então equivalente ao sistema das nove equações que se seguem:

1.

$$\dot{y}_1 = -\frac{2}{(x_1 - x_2)^3} - \frac{2}{(x_1 - x_3)^3}$$

2.

$$\begin{aligned} -\frac{i(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{(x_2 - x_1)^2} &= \frac{i}{(x_2 - x_1)^2}(y_2 - y_1) + \\ &+ \frac{i}{(x_2 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_2 - x_1} - \frac{i}{x_3 - x_1} \right) + \\ &+ \frac{i}{(x_1 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_2 - x_3} - \frac{i}{x_2 - x_1} \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} -\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_1)}{(x_3 - x_1)^2} &= \frac{i}{(x_3 - x_1)^2}(y_3 - y_1) + \\ &+ \frac{i}{(x_3 - x_2)^2} \left(\frac{i}{x_3 - x_1} - \frac{i}{x_2 - x_1} \right) + \\ &+ \frac{i}{(x_1 - x_2)^2} \left(\frac{i}{x_3 - x_2} - \frac{i}{x_3 - x_1} \right) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} -\frac{i(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{(x_1 - x_2)^2} &= \frac{i}{(x_1 - x_2)^2}(y_1 - y_2) + \\ &+ \frac{i}{(x_1 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_1 - x_2} - \frac{i}{x_3 - x_2} \right) + \\ &+ \frac{i}{(x_2 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_1 - x_3} - \frac{i}{x_1 - x_2} \right) \end{aligned}$$

5.

$$\dot{y}_2 = -\frac{2}{(x_2 - x_1)^3} - \frac{2}{(x_2 - x_3)^3}$$

6.

$$\begin{aligned}
-\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)}{(x_3 - x_2)^2} &= \frac{i}{(x_3 - x_2)^2}(y_3 - y_2) + \\
&+ \frac{i}{(x_3 - x_1)^2} \left(\frac{i}{x_3 - x_2} - \frac{i}{x_1 - x_2} \right) + \\
&+ \frac{i}{(x_1 - x_2)^2} \left(\frac{i}{x_3 - x_1} - \frac{i}{x_3 - x_2} \right)
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
-\frac{i(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{(x_1 - x_3)^2} &= \frac{i}{(x_1 - x_3)^2}(y_1 - y_3) + \\
&+ \frac{i}{(x_1 - x_2)^2} \left(\frac{i}{x_1 - x_3} - \frac{i}{x_2 - x_3} \right) + \\
&+ \frac{i}{(x_2 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_1 - x_2} - \frac{i}{x_1 - x_3} \right)
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
-\frac{i(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)}{(x_2 - x_3)^2} &= \frac{i}{(x_2 - x_3)^2}(y_2 - y_3) + \\
&+ \frac{i}{(x_2 - x_1)^2} \left(\frac{i}{x_2 - x_3} - \frac{i}{x_1 - x_3} \right) + \\
&+ \frac{i}{(x_1 - x_3)^2} \left(\frac{i}{x_2 - x_1} - \frac{i}{x_2 - x_3} \right)
\end{aligned}$$

9.

$$\dot{y}_3 = -\frac{2}{(x_3 - x_1)^3} - \frac{2}{(x_3 - x_2)^3}$$

Das equações (1), (5) e (9) resulta que:

$$\dot{y}_1 = -2 \sum_{k=2,3} \frac{1}{(x_1 - x_k)^3}$$

$$\dot{y}_2 = -2 \sum_{k=1,3} \frac{1}{(x_2 - x_k)^3}$$

e

$$\dot{y}_3 = -2 \sum_{k=1,2} \frac{1}{(x_3 - x_k)^3}.$$

Além disso, por subtração dos pares de equações (2) e (4), (3) e (7), e (6) e (8), vem:

$$-\frac{i(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + i(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{i(y_2 - y_1) - i(y_1 - y_2)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$-\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + i(\dot{x}_1 - \dot{x}_3)}{(x_1 - x_3)^2} = \frac{i(y_3 - y_1) - i(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)^2}$$

e

$$-\frac{i(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + i(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)}{(x_2 - x_3)^2} = \frac{i(y_3 - y_2) - i(y_2 - y_3)}{(x_2 - x_3)^2}$$

donde resulta

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = -y_1 + y_2$$

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_3 = -y_1 + y_3$$

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = -y_2 + y_3.$$

Atendendo a que $y_k = \dot{x}_k$, facilmente se verifica que o sistema de equações

$$\begin{cases} y_k = -\dot{x}_k \\ \dot{y}_k = -2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{(x_k - x_j)^3} \end{cases}$$

é solução particular do sistema considerado, concluindo-se assim a demonstração pretendida.

Determinemos, agora, os valores próprios de L que, conforme vimos anteriormente, são invariantes em relação ao tempo. Para isso, resolvamos a equação

$$\det(L - \lambda I) = 0.$$

Temos,

$$L - \lambda I = \begin{pmatrix} y_1 - \lambda & \frac{i}{x_1 - x_2} & \frac{i}{x_1 - x_3} \\ \frac{i}{x_2 - x_1} & y_2 - \lambda & \frac{i}{x_2 - x_3} \\ \frac{i}{x_3 - x_1} & \frac{i}{x_3 - x_2} & y_3 - \lambda \end{pmatrix}$$

donde a equação

$$\det(L - \lambda I) = 0$$

é equivalente à equação

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 + I_2\lambda + I_3 = 0.$$

Nesta,

$$I_1 = y_1 + y_2 + y_3,$$

é um primeiro integral do sistema, conhecido por **impulso**;

$$I_2 = \frac{1}{(x_1 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{1}{(x_1 - x_2)^2} - y_1y_2 - y_1y_3 - y_2y_3,$$

é outro primeiro integral conhecido por **energia total** do sistema; e

$$I_3 = y_1y_2y_3 - \frac{y_1}{(x_2 - x_3)^2} - \frac{y_2}{(x_1 - x_3)^2} - \frac{y_3}{(x_1 - x_2)^2}$$

é ainda outro primeiro integral do sistema.

Fica assim provada a existência dos três integrais, bem como a sua racionalidade. Garantida a sua involução, fica provado que os integrais apresentados se encontram nas condições do Teorema de Liouville apresentado e demonstrado no capítulo 2. Desta forma, está garantida a integrabilidade deste sistema hamiltoniano. Na secção seguinte estudar-se-á a dispersão deste sistema de partículas.

4.3 A conjectura de Marchioro e o comportamento assintótico deste sistema de partículas

O sistema das n partículas discutido na secção anterior tem um comportamento muito simples. Uma vez que as partículas exercem, entre elas, forças de repulsão, elas afastam-se quando $t \rightarrow \pm\infty$ e comportam-se como partículas livres. Por este motivo, é claro que os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_k(\pm t) = \dot{x}_k(\pm\infty)$$

existem. De facto, estas velocidades limites (ou as suas simétricas) podem ser vistas como integrais das órbitas a que as partículas pertencem. Portanto, a existência dos integrais deste sistema não é surpresa; impressionante, é o facto de estes serem racionais, o que implica que

$$\dot{x}_k(+\infty) = \dot{x}_{n+1-k}(-\infty), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e significa que as partículas simplesmente trocam de velocidades. Estas relações foram determinadas por Marchioro no caso tridimensional ($n = 3$), que conjecturou a sua veracidade para um n arbitrário. Calogero foi responsável pela sua determinação no caso do problema quântico-mecânico.

Para provar a asserção anterior, observemos que podemos etiquetar as partículas de acordo com a sua ordem e assim sendo

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Mostremos, de seguida, que os limites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_k(\pm t) = \dot{x}_k(\pm\infty)$$

existem e que

$$\dot{x}_1(+\infty) < \dot{x}_2(+\infty) < \dots < \dot{x}_n(+\infty).$$

As equações que definem o movimento deste sistema de partículas são

$$\ddot{x}_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} = 2 \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^{-3}, \quad k = 1, \dots, n$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ddot{x}_n - \ddot{x}_1) &= \frac{1}{2}\left(2 \sum_{j \neq n} (x_n - x_j)^{-3} - 2 \sum_{j \neq 1} (x_1 - x_j)^{-3}\right) \\ &= \sum_{j < n} (x_n - x_j)^{-3} + \sum_{j > 1} (x_j - x_1)^{-3}\end{aligned}$$

é um número positivo, atendendo à ordenação anteriormente dada às partículas.

Por outro lado, uma vez que \dot{x}_k é limitada para qualquer t , podemos concluir, por integração, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x_k - x_l)^{-3} < \infty, \text{ para } k > l = 1 \text{ e para } l < k = n.$$

Tendo em conta as equações diferenciais anteriores, é possível acrescentar que esta relação é válida para quaisquer pares com $k > l$.

Por outro lado, as equações

$$\ddot{x}_k = 2 \sum_{j \neq k} (x_k - x_j)^{-3}, \text{ com } k = 1, 2, \dots, n$$

obrigam à existência do limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_k (\pm t),$$

como se pretendia provar.

Para provar agora que

$$\dot{x}_1 (+\infty) < \dot{x}_2 (+\infty) < \dots < \dot{x}_n (+\infty),$$

recorde-se novamente a ordenação atribuída às partículas. Esta ordenação obriga a que

$$\dot{x}_1 (+\infty) \leq \dot{x}_2 (+\infty) \leq \dots \leq \dot{x}_n (+\infty)$$

e

$$\dot{x}_1 (-\infty) \geq \dot{x}_2 (-\infty) \geq \dots \geq \dot{x}_n (-\infty).$$

Inicialmente, consideremos

$$\phi(t) = x_n - x_1,$$

claramente uma função estritamente positiva. Novamente, de

$$\frac{1}{2}(\ddot{x}_n - \ddot{x}_1) = \sum_{j < n} (x_n - x_j)^{-3} + \sum_{j > 1} (x_j - x_1)^{-3} > 0,$$

resulta que

$$\frac{1}{2} \ddot{\phi} = \frac{1}{2}(\ddot{x}_n - \ddot{x}_1) \geq 2(x_n - x_1)^{-3} > 0.$$

Desta forma, conclui-se que $\dot{\phi}$ é monótona crescente e

$$\dot{\phi} (+\infty) = \dot{x}_n (+\infty) - \dot{x}_1 (+\infty) \geq 0.$$

Caso $\dot{\phi} (+\infty) = 0$, ter-se-ia $\dot{\phi} (t) < 0$ e portanto ϕ seria uma função limitada. Mas então $(x_n - x_1)^{-3}$ seria limitada excepto numa vizinhança da origem, o que implicaria que ϕ fosse ilimitada. Esta contradição leva a que

$$\dot{x}_1 (+\infty) < \dot{x}_n (+\infty),$$

o que obriga a que pelo menos uma das desigualdades

$$\dot{x}_1 (+\infty) \leq \dot{x}_2 (+\infty) \leq \dots \leq \dot{x}_n (+\infty)$$

passa a ser estrita, ou seja, garante-se a existência de s tal que

$$\dot{x}_s (+\infty) < \dot{x}_{s+1} (+\infty).$$

Mostremos agora que

$$\dot{x}_1 (+\infty) < \dot{x}_s (+\infty)$$

e

$$\dot{x}_{s+1} (+\infty) < \dot{x}_n (+\infty),$$

o que provará, por indução em n , que todas as velocidades são diferentes. Para tal, basta mostrar que

$$\dot{x}_1(+\infty) < \dot{x}_s(+\infty),$$

uma vez que a outra desigualdade é simétrica a esta.

De

$$\dot{x}_s(+\infty) < \dot{x}_{s+1}(+\infty).$$

conclui-se que

$$(x_j - x_s)^{-1} = 0(t^{-1}), \text{ para } j > s$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\ddot{x}_s - \ddot{x}_1) &= \sum_{j < s} (x_s - x_j)^{-3} - 0(t^{-3}) + \sum_{j > 1} (x_j - x_1)^{-3} \\ &\geq 2(x_s - x_1)^{-3} - 0(t^{-3}). \end{aligned}$$

Seja

$$\psi = x_s - x_1 + At^{-1}$$

com A , constante positiva, tal que

$$\ddot{\psi} \geq 4(x_s - x_1)^{-3}, \text{ para } t > t_0.$$

Desta última desigualdade resulta que $\ddot{\psi}$ é limitada inferiormente e portanto $\dot{\psi}$ é uma função crescente e $\dot{\psi}(+\infty) \geq 0$.

Tal como anteriormente, a possibilidade de $\dot{\psi}(\infty) = 0$ conduz a uma contradição: como

$$\dot{\psi}(t) < \dot{\psi}(\infty) = 0, \text{ para } t > t_0,$$

ter-se-ia ψ limitada para $t > t_0$ e portanto $\ddot{\psi}$ seria limitada excepto numa vizinhança da origem e consequentemente ψ seria ilimitada. Assim sendo, $\dot{\psi}(\infty) > 0$, como pretendíamos demonstrar.

Isto implica obviamente que

$$(x_k - x_l)^{-1} = 0(t^{-1}), \text{ para } t \rightarrow +\infty, k \neq l,$$

e portanto podemos concluir que a matriz $L(t)$ tem limite, digamos, $L(\infty)$, que é uma matriz diagonal. Como os valores próprios λ_k de $L(t)$ são independentes de t , tem-se que

$$y_k(+\infty) = \lambda_k,$$

convencionando que

$$\lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_1.$$

Quando $t \rightarrow -\infty$, a matriz L aproxima-se de uma matriz diagonal constituída pelos valores próprios referidos. No entanto, atendendo à ordenação das partículas que obrigou a que

$$\dot{x}_1(+\infty) \leq \dot{x}_2(+\infty) \leq \dots \leq \dot{x}_n(+\infty)$$

e

$$\dot{x}_1(-\infty) \geq \dot{x}_2(-\infty) \geq \dots \geq \dot{x}_n(-\infty),$$

os valores próprios de L surgem por ordem inversa.

Fica então demonstrado o *estranho* comportamento assintótico deste sistema de partículas, conjecturado por Marchioro.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V.I.; Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 3 - Dynamical Systems III; Editora Springer-Verlag; 2 edição.
- [2] ARNOLD, V.I.; Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica; Editora Mir Moscovo; 1987.
- [3] ARNOLD, V.I. & GIVENTAL, A.B.; Symplectic Geometry; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Volume 4 - Dynamical Systems IV; Editora Springer; 2 edição.
- [4] GOLDSTEIN, HERBERT; Classical Mechanics, World Student Series; Editora Addison-Wesley Publishing Company; 2 edição; 1980.
- [5] HIRSCH, MORRIS W. & SMALE, STEPHEN; "Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra"; Pure and Applied Mathematics; Academic Press, Inc.; 1974
- [6] MOSER, JÜRGEN; Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations; Advances in Mathematics; 1975.
- [7] MOSER, JÜRGEN; The Scattering Problem for Some Particle Systems on the Line; New York University.